

Funzioni ellittiche (e modulari)

09/23

- funzioni periodiche: $f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in \text{dominio} \rightarrow p \text{ 'periodo'}$
($G, +$) ab

• $\Gamma = \{\text{periodi}\} < G$

Quindi f induce una funzione su G/Γ

Più in generale: $G \ni X$ insieme e f definita su X

$\Rightarrow \Gamma < G$ diciamo che f è Γ -periodica se $f(\gamma \cdot x) = f(x)$
 $\forall x \in X, \gamma \in \Gamma$

Regolarità (ad esempio: $f: X \rightarrow \mathbb{C}, X = G$)
continua

$\rightarrow$ Se f è continua $\Rightarrow \Gamma$ sottogruppo chiuso

es: $G = \mathbb{R}^n$: i sottogruppi chiusi di $\mathbb{R}^n$ sono del tipo $\Gamma = V + L$
dove V è un ssp vettoriale,

$L \cap V = \{0\}$

L è discreto e $\rightarrow L = \mathbb{Z}v_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}v_m \quad m \leq n$
e $\{v_i\}$ sono $\mathbb{R}$ -lin indep.

ad esempio: $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$ non è discreto in $\mathbb{R}$

In realtà ci interessano solo le parti discrete: $\mathbb{R}^n /_{V+L} \simeq \mathbb{R}^k /_{L'}$
con L' discreto in $\mathbb{R}^k$

Su $\mathbb{R}$ ho come sottogruppi discreti $\{0\}, L \simeq \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \circ \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$

- $\mathbb{C}$: funzioni omerfe/meromorfe

Quando Γ : se $[\text{rk } \Gamma = 1] \rightarrow f$ del tipo $e^z, \Gamma = 2\pi i \mathbb{Z}$
quindi $\mathbb{C}/\Gamma = \mathbb{C} /_{\text{infinito}} \simeq \mathbb{C}^*$
 $\uparrow$
 e^z

φ funzione intera (omerfa in $\mathbb{C}$)
 $\rightarrow \varphi(e^z)$ è omerfa e periodica.

se $[\text{rk } \Gamma = 2] : \Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$
con $\{\omega_1, \omega_2\} \in \mathbb{C}$, lin indep in $\mathbb{R}$

Se non impongo l'omerfia: $\psi \in C^\infty(\mathbb{C})$ supporto compatto
 $\rightarrow \varphi(z) = \sum_{m \in L} \psi(z+m)$

Se invece cerco f omerfa e L -periodica: f costante

infatti: $\mathbb{C}/L \simeq S^1 \times S^1 \quad (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) : \tilde{f}$ continua $S^1 \times S^1$ comp
 $\rightarrow$ limitata $\rightarrow f$ lim + interm
 $\rightarrow$ costante

Allora: f meromorfa e L -periodica $\leftrightarrow f$ è funzione ellittica
(rispetto al reticolo Γ)

- non è detto che esista
- dipende da $\Gamma \leftarrow \exists \psi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ lineare reale ma
(a meno di omotopie) in generale NON omerfe

- Connessioni con curve algebriche

Curva algebrica piana: $f(u,v) = 0$ $(u,v) \in \mathbb{C}^2$ } $\xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}^2}$ curve
 f polinomio

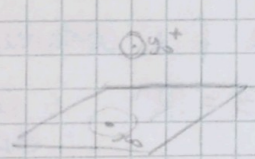
$$\mathbb{P}_2 = \{[u,v,z] : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \sim\}$$

Ad esempio: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ (*) $x,y \in \mathbb{C}$! non è comp.
 $\forall z \in \mathbb{C} : f(\cos(z), \sin(z)) = 0 \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} \equiv \{f=0\}$
 corrispondenza biomorfe

Sulle curve algebriche si può dare una struttura OLOMORFA.

se scelgo $x_0 \neq \pm 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1-x_0^2}$

$x_0 \in D$ t.c. $\forall x \in D$ ho 2 sol per y
 $\rightarrow y^+(x), y^-(x)$ in D



Scelto un reticolo $L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 : \mathbb{C}/L \leftrightarrow$ curva algebrica CUBICA in $\mathbb{P}_2$

(*) f in $\mathbb{P}_2$ diventa $u^2 + v^2 = z^2$ e trovo in più i punti con $z=0$
 Punti all'infinito: $\{(a:b:0) \text{ con } a^2 + b^2 = 0\} = \{(1:i:0), (1:-i:0)\}$
 (e infatti a $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ mancano 2 pt per diventare compatto)

Ovvero $f(X,Y,Z) = 0$ $\deg f = 3$, f omogenea non-singolare

deomogenizzando trovo sempre $y^2 = \text{polinomio}(x)$

es: $y^2 = x^3 + 2x - 5 \rightarrow Y^2Z = X^3 + 2XZ^2 - 5Z^3$ curva ellittica

Le CURVE ELLITTICHE sono parametrizzate da f doppiamente periodiche

- es: dimostrare che $\sin(z)$ non è una funzione algebrica di z

- Gruppi algebrici

$\mathbb{C} : \mathbb{G}_a$ (additivo) $x+y$

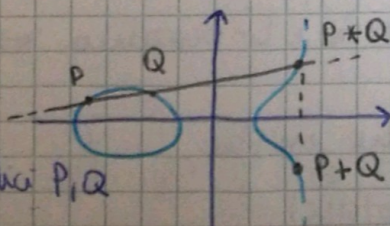
$\mathbb{C}^* : \mathbb{G}_m$ (moltiplicativo) xy

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a^2 + b^2 = 1 \right\} \text{ formule di addizione di } \sin/\cos \leftrightarrow S^1$$

Con lo stesso ragionamento si dimostra che anche sui punti delle curve ellittiche si trova una legge di gruppo

es: $y^2 = x^3 + 2x - 5$ su $\mathbb{R}$

$P+Q$ è la terza radice di un cubico che ha come radici P, Q



$(P,Q) \mapsto P+Q$ è una legge di gruppo
 origine: pt all'infinito $\rightarrow (0:1:0)$

* FUNZIONI ELLITTICHE

09/25

Dato L reticolo di $\mathbb{C}$, una funzione ellittica (rel a L) e-
 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfe con gruppo di periodi L .

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^* : \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$$

$$f(z+\lambda) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \lambda \in L \rightarrow \tilde{f} \text{ definita su } \mathbb{C}/L \approx S^1 \times S^1 \approx \text{cmpt}$$

Oss: a meno di traslazioni con L , f ha un # finito di poli

Inoltre $\mathbb{C}/L$ ammette una STRUTTURA OLOMORFA (per ogni $\bar{x} \in \mathbb{C}/L$ localmente ha la struttura di $\mathbb{C}$ } trovo $D \subset \mathbb{C}$ intorno di x t.c. $D/L = D$)

* CURVE ELLITTICHE

$$\{ Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3 \} \leftrightarrow \{ y^2 = x^3 + ax + b \}$$

Dimostriamo che $\forall L \exists f$ t.c. $f(\mathbb{C}/L) = \{ y^2 = x^3 + ax + b \}$]?

es. $Y^2Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$ non singolare $\equiv x^3 + ax^2 + b$ non ha radici multiple

(*) Forma di Weierstrass: si dimostra che ogni polinomio di III° grado non degradabile può essere in questa forma.

• Legge di gruppo: $\mathbb{C}/L \longleftrightarrow \text{curve (descritte da)} \oplus \text{espresso da funzioni razionali}$

- Motivazioni:

$$1. \text{ Lunghezza d'arco di un'ellisse: } y^2 + ax^2 = 1, \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{y} \\ \rightarrow l = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{1 + \frac{a^2 x^2}{y^2}} dx = \int \frac{1}{y} \sqrt{(1 - ax^2 + a^2 x^4)} dx \\ = \int \frac{\sqrt{(1-ax^2)(1+(a^2-a)x^4)}}{1-ax^2} \quad \text{e sia } u = \sqrt{(1-ax^4)(1+(a^2-a)x^4)}$$

ovvero: $u^2 = p(x)$ con $\deg p = 4$. Ma sia $\alpha: p(\alpha) = 0$, allora

$$u^2 = (x-\alpha)q(x) \quad \text{e pongo } \frac{1}{t} = x-\alpha : u^2 = \frac{1}{t} q(\alpha + 1/t)$$

$$\rightarrow \left(\frac{t^2 u}{y}\right)^2 = t^3 q(\alpha + 1/t) = \tilde{q}(t) \rightarrow y^2 = \tilde{q}(t) \text{ con } \deg \tilde{q} = 3.$$

• es: $u^2 = p(x)$ con $\deg p = 2n \rightarrow \tilde{u}^2 = \tilde{p}(x)$ con $\deg \tilde{p} = 2n-1$ ($\uparrow$)

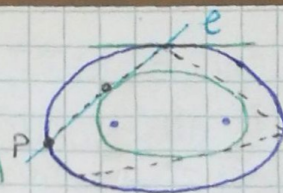
$$\left[\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad y^2 + x^2 = 1 \rightarrow \text{posso parametrizzare al cerchio } x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{O} \right]$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$: non si può parametrizzare ma [Fagnano] si dimostra

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \text{funzione razionale} \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \right)$$

3. Biliardo ellittico:

- Si dimostra che ogni segmento della traiettoria è tangente ad una ellisse (caustica) che dipende dal primo segmento.



$\{(P, e) : P \in \text{Biliardo}, e \text{ retta}\}$ è una curva ellittica

$(P, e) \mapsto (P', e')$

$Q \rightarrow Q'$

è una traslazione di π sulla curva ellittica.

* STRUTTURE COMPLESSE

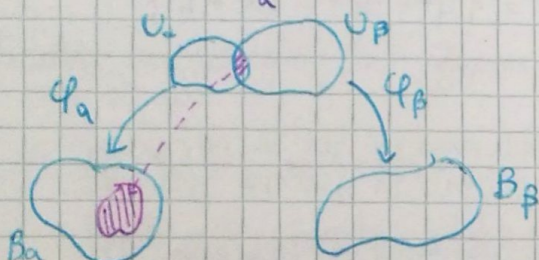
Def: X è una superficie di Riemann se:

- X è uno spazio topologico connesso di Hausdorff
- $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ aperti t.c. $\forall \alpha: \exists \phi_{\alpha}: U_{\alpha} \xrightarrow{\sim} B_{\alpha}$ ap. connessi di $\mathbb{C}$

ed inoltre vale che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\phi_{\beta} \circ \phi_{\alpha}^{-1}: \phi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow B_{\beta}$$

è olomorfa con inversa



⚠ La condizione T2 non è ridondante. Ad esempio, disco con 2 origini

Esempi: 1. $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \{(x_1, x_2) \neq (0, 0)\} / \sim$ [Sfera di Riemann]

$$\text{Carte: } U_0 = \{x_1 \neq 0\} \xrightarrow{\phi_0} \frac{x_0}{x_1} \in \mathbb{C}$$

$$U_1 = \{x_0 \neq 0\} \xrightarrow{\phi_1} \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{C}$$

$$\rightarrow (x_0, x_1) \in U_0 \cap U_1: \frac{x_0}{x_1} \neq 0 \rightarrow \phi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow (\phi_1 \circ \phi_0^{-1})(z) = \phi_1(z, 1) = 1/z$$

3. $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ ($\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ rivestimento)

4. Aperto connesso di $\mathbb{C}$ - insieme finito di p 's

5. Curve algebriche in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ non singolari $f(x, y, z) = 0$ omogeneo

(Si può dimostrare che se $p(x)$ è singolare, allora i coef di p soddisfanno una funzione algebrica che dipende da $\deg p$)

$$P = (x_0 : y_0 : z_0) \in \mathcal{C} \quad f(x, y, z) = 0 \xrightarrow{z=1} \tilde{f}(x_0, y_0) = 0$$

$$\phi_{\alpha}: \mathcal{V}(f) \rightarrow B \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \rightarrow x = \psi(y) \\ \text{I. Dim} \quad \text{in intorno di } y \in B \end{array} \right. \quad \tilde{f}(\psi(y), y) = 0$$

$$\text{Oss: } \deg f = d: f(\lambda x) = \lambda^d f(x) \rightarrow \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = d \lambda^{d-1} f(x)$$

$$\Rightarrow df(x) = \langle x, \nabla f(x) \rangle$$

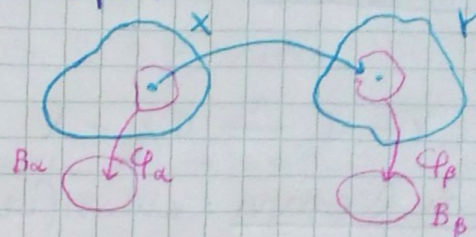
Def: $f: X \rightarrow Y$ con X, Y S.d.R si dice mappa domorfa fra S.d.R se f è domorfa in $x_0 \in X \forall x_0$

09/30

dove diciamo che $f: X \rightarrow Y$ S.d.R è domorfa in $x_0 \in X$ se

$$\exists U_\alpha \ni x_0, V_\beta \ni f(x_0) \text{ con } f(U_\alpha) \subset V_\beta$$

t.c. $\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: B_\alpha \rightarrow B_\beta$
è domorfa in $\varphi_\alpha(x_0)$



- Si verifica facilmente che non dipende dall'aperto U_α scelto

($U_\gamma \rightarrow \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\gamma^{-1} = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \varphi_\gamma^{-1}$ da per def è uguale a s_γ)

Def: X e Y si dicono biolomorfe (o biolom. equivalenti) se

$$\exists f: X \rightarrow Y \text{ bigettiva t.c. } f, f^{-1} \text{ mappe domorfe.}$$

⚠ Dipende dalla struttura *do di* X e Y

ex: $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ omeomorfismo: data $\{U_\alpha\}$ atlante di $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \{g(U_\alpha)\} \text{ atlante di } \mathbb{C}$$

In questo modo ho una nuova struttura complessa di $\mathbb{C} \rightarrow$ ora g è BIOLOMORFA

$$(\varphi_\beta \circ g \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ g \circ g^{-1} \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$$

Oss: $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ è una S.d.R con carte date da $(U_\alpha, i_\alpha: U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{C})$

Ora $D \cong \mathbb{C} \rightarrow$ trovo una struttura complessa indotta da D .

Facciamo vedere che $D, \mathbb{C}$ non sono BIOLOMORFE:

se $\mathbb{C} \xrightarrow{f} D \hookrightarrow \mathbb{C}$ con f mappa biolomorfa $\Rightarrow \gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ do limitata
 $\rightarrow$ costante $\rightarrow f$ costante am.

Quindi la struttura *do di* $\mathbb{C}$ indotta da D è una struttura diversa

[In realtà $\mathbb{C}$ e D sono le uniche 2 strutture complesse di $\mathbb{C} \rightarrow$ vedi T. Riemann]

Prop: X S.d.R e $\pi: Y \rightarrow X$ rivestimento $\xrightarrow{\text{connesso}} \exists!$ su Y S.d.R che rende π olomorfa

Dim: $\forall x \in X \exists U \ni x$ t.c. $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup V_i$ t.c. $\pi|_{V_i}: V_i \xrightarrow{\sim} U$

Considero, detta $\{U_\alpha\}$ carta di X , la seguente struttura di Y

$y \in Y \rightarrow x_0 = \pi(y) \in U_\alpha, x_0 \in U$ banalizzante: $y_0 \in V \subset \pi^{-1}(U)$
($U \subset U_\alpha$) ed è l'unica comp. connessa che contiene y

$\rightarrow \gamma = \pi \circ \varphi$ dove $\varphi: U \xrightarrow{\sim} B$ dell'atlante di X

ex: $D^* = D \setminus \{(0,0)\}$: $\pi: D^* \rightarrow D^*$ t.c. $\pi(x) = x^2$

In generale: $\pi: Y \rightarrow X$ rivestimento, Y SdR non è detto che X erediti la struttura π domorfa $\rightarrow$ la struttura di SdR

Cond. necessaria: voglio che $q: Y \rightarrow X$ sia domorfa per la struttura di SdR

ex: $Y = \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/L = X$ invece eredita la struttura di SdR

* Teo di Riemann: classifica le SdR semplicemente connesse

X non semplicemente connessa $\Rightarrow \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ riv. universale
e per $\mathcal{G}$: $\tilde{X}$ eredita da X una struttura di Sup. di R.
per cui π domorfa

e per TdR conosco $\tilde{X}$

Inoltre $X = \tilde{X}/G$ dove $G < \{\text{bi} \text{ domorfismi } \tilde{X}\}$, così otteniamo
tale che π_G rivestimento tutte le SdR come qznt

Teo: $\tilde{X}$ superfici di Riemann semplicemente connessa è uno delle seguenti
(a meno di biomorfismo) $\rightarrow$

- 1) $\tilde{X} = \mathbb{P}(\mathbb{C}) = \hat{\mathbb{C}}$ sferica
- 2) $\tilde{X} = \mathbb{C}$ euclidea
- 3) $\tilde{X} = \mathbb{D}$ iperbolica

Sono 3 tipi distinti: $\mathbb{P}$ domorfa invertibile $\nu: \mathbb{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ e uguale $\nu: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$

X euclidea (come qznt) Y iperbolica (come qznt) allora $\exists \nu: X \rightarrow Y$ biomorfa

Se avessi $\nu: X \rightarrow Y$ biomorfa avrei $\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{\nu}} & \tilde{Y} \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{\nu} & Y \end{array}$ ma $\tilde{\nu}$ do $\rightarrow$ cost $\rightarrow \nu$ cost.

Vogliamo capire:

1. Come sono fatti i gruppi di automorfismi domorfi di $\tilde{X}$
2. Capire quando $\pi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ è rivestimento
3. Classificare tutte le SdR

Sia M varietà reale connessa con G gruppo di omeomorfismi:

quando M/G è t.c. $\pi: M \rightarrow M/G$ è un rivestimento?

Prop: $\pi: M \rightarrow M/G$ rivestimento $\Leftrightarrow$ i) G prop discontinua
($\forall K$ comp: $K \cap gK \neq \emptyset$ per finiti g)

ii) G agisce liberamente
($\exists x: g(x) = x \rightarrow g = e$)

Dim: ($\Rightarrow$) Sia $x \in M$, $g \in G$ t.c. $gx = x$.
Sia $U \ni x$ aperto "trivalizzante" (uno dei sottoinsiemi π_1 omeo)

$\rightarrow V$ intorno di x contenuto in U t.c. $g(V) \subset U$
Ma allora $\pi(g(y)) = \pi(y)$ e preso $y \in V: g(y), y \in U$
ma allora $g(y) = y$ ($\pi|_U$ omeo) $\rightarrow g|_V = e$

$\Rightarrow \forall x: g(x) = x \quad \exists I(x): g|_{I(x)} = \text{id} \rightarrow \{g(x) = x \text{ pt fissi}\}$ aperto

Ma $\{g(x) = x\}$ è sempre un chiuso negli Hausdorff $\rightarrow$ ap + chiuso in un connetto $\Rightarrow g|_M = e$.

Abbiamo dimostrato Glibuo. (ii)
Dimostriamo (i).

Sia K cmpt e sia $\{g_n\} \subset G$ t.c. $K \cap g_n K \neq \emptyset$, ovvero
 $\forall n \exists x_n \in K$ t.c. $g_n(x_n) \in K$

Passando a una sottosuccessione posso supporre $x_n \rightarrow x \in K$
e $g_n(x_n) \rightarrow y \in K$. Ma ora:

$$\pi(x_n) = \pi(g_n(x_n)) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y) \text{ ovvero } y = g(x) \text{ per qualche } g$$

Concludo: $g^{-1}(g_n(x_n)) \rightarrow x$ ma $x_n \rightarrow x$ e quindi esiste U t.c. basale.

$$(g^{-1} \circ g_n)(x_n), x_n \in U \xrightarrow{\pi|_U \text{ omeo}} g^{-1}g_n(x_n) = x_n + (ii) \Rightarrow g_n = g \text{ def } \rightarrow \# \text{ finito}$$

($\Leftarrow$) $\pi: M \rightarrow M/G$ e sia $\bar{x} \in M/G$

Sia $x \in K$ cmpt $\Rightarrow \{g \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ finito
 $= \{g_1, \dots, g_n, e\}$ ed inoltre $g_i(x) \neq x$

$\rightarrow x \in K \setminus \bigcup_{i=1}^n g_i(K)$ e prendo $U \subset K \setminus \bigcup_{i=1}^n g_i(x)$ (T2?)

Adesso $gU \cap hU \cong U \cap g^{-1}hU \subset \tilde{K} \cap g^{-1}h\tilde{K} = \emptyset$ se $g \neq h$.

X SdR e $\tilde{X}$ riv. universale di X

10/02

$\Rightarrow \tilde{X}$ ha una struttura di SdR indotta da $X \xrightarrow{TdR} \begin{cases} P(\mathbb{C}) \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{D} \end{cases}$

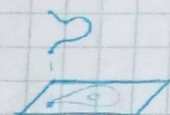
e $X = \tilde{X}/G$ dove $G < \text{Aut}(\tilde{X})$, $g \in G$ automorfismi olomorfi.

segue dal fatto che $\pi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ è olomorfo

Abbiamo già visto che necessariamente l'azione di G su X deve essere libera e prop. discontinua

[~~non interpretare la via di Galois: quando~~
ANALOGIA con la teoria di Galois:

$y^2 = x$ è un rivestimento connesso di $\mathbb{C}^*$ di grado 2
 $\{(x, y) \mid x \neq 0, y^2 = x\} \xrightarrow{\pi} x$



$\Rightarrow$ se consideriamo i sollevamenti dei coperi in un punto x troviamo delle permutazioni (in questo caso di 2 elementi)

$y^3 + y = x \rightarrow$ in questo caso le fibre hanno cardinalità 3

$\rightarrow$ Ottengo un sottogruppo di S^3

]

(Def. vedi lezione 10.07 $\rightarrow$)

$$\textcircled{2} \text{Aut}_{\text{olo}}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0 \right\}$$

dove $z \sim [z_1:z_2] \Rightarrow$ l'automorfismo $z \mapsto g(z_1, z_2) = (az_1+bz_2 : cz_1+dz_2)$

È facile vedere $\supseteq$:

$$\rightarrow GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}_{\text{olo}}(\hat{\mathbb{C}}) \text{ e } \ker = \{\lambda I\} \Rightarrow PGL_2(\mathbb{C}) = \frac{GL(2, \mathbb{C})}{\text{scalari}} = \text{Aut}_{\text{olo}}(\hat{\mathbb{C}})$$

$$\text{Oss: } PGL_2(\mathbb{C}) \cong PSL_2(\mathbb{C})$$

Def: Un gruppo si dice triplamente transitivo se $\forall$ coppia di triple ordinate, esiste $g \in G$ t.c. $g(a_i) = b_i$.

$\rightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ è triplamente transitivo (i parametri sono 4 ma nono in $P(\mathbb{C})$ $\rightarrow$ ho 3 parametri e devo risolvere 3 eq)

È facile dimostrare che è transitivo.

Doppia mente transitivo: $(z_0, z_1) \rightarrow (w_0, w_1)$ ma per transitività basta verificare $(0, 1) \rightarrow (w_0, w_1)$

Uguale con la tripla transitività.

Voglio $\text{Stab}\{(z_0, z_1, z_2)\} = \text{Stab}\{(0, 1, +\infty)\}$ per tripla transitività

$$\begin{aligned} g(0) &= b/d = 0 \rightarrow b=0 \\ g(\infty) &= a/c = \infty \rightarrow c=0 \end{aligned} \rightarrow g(1) = \frac{a}{d} = 1 \text{ ma quindi } g(z) = z$$

Oss: $z_1, z_2, z_3, z_4 \rightarrow \frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_2-z_1)(z_4-z_3)}$ è fissato da $PGL_2(\mathbb{C})$ distinti in $\hat{\mathbb{C}}$

$$\text{Teo: } \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = PGL_2(\mathbb{C})$$

Dim: $g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$, componendo a sx con $\sigma \in PGL_2(\mathbb{C})$ posso assumere che $g(0)=0, g(+\infty)=+\infty$ (doppia tr.)

$\Rightarrow g(z)$ è una funzione OLOMORFA INTERA $\rightarrow \frac{g(z)}{z} = f(z)$

$$\left\{ \begin{aligned} &\text{Dico che } f \text{ è limitata: } u = \frac{1}{z} : G(u) = \frac{1}{g(1/u)} \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \\ &\text{se } \sigma(z) = \frac{1}{z} \rightarrow G(u) = \sigma \circ g \circ \sigma^{-1} \\ &\Rightarrow G(0) = 0 \text{ e } \frac{g(z)}{z} = \frac{g(1/u)}{(1/u)} = \frac{u}{G(u)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{1}{G'(0)} \end{aligned} \right.$$

dove $G'(0) \neq 0$ perché G automorfismo $\Rightarrow \frac{g(z)}{z}$ limitata $\rightarrow$ FINISCO CON LIOUVILLE

Comincia a g avere una singolarità in $+\infty$

$\rightarrow g$ manda in un certo pt di un intorno di z_0 (aperta)

- T di Weierstrass $\forall$ intorno di ∞ I_∞ : $g(I_\infty) \cap I_{w_0}$ non per

$\Rightarrow g$ ha un polo in $+\infty$: $g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ e si dimostra che $\deg Q = 1$

$$(b) \text{Aut}_{\text{ob}}(\mathbb{C}) = \{ z \mapsto az+b, a \neq 0 \} = G$$

$$\Rightarrow \text{Abbiamo la successione esatta: } 0 \rightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\sigma_{a,b}} G \xrightarrow{\sigma_{a,b} \mapsto a} \mathbb{C}^* \rightarrow 1$$

$b \mapsto \sigma_{0,b}$

$$\text{e passando ai gruppi algebrici: } 0 \rightarrow G_a \rightarrow G \rightarrow G_m \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow G \cong \mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{C} \text{ (o il contrario?)}$$

$$\Rightarrow G < \text{Aut}_{\text{ob}}(\mathbb{C}) \text{ ed \u00e8 doppiamente transitivo}$$

$$\text{Teo: } G = \text{Aut}_{\text{ob}}(\mathbb{C})$$

$$\text{Dim: } g \in \text{Aut}(\mathbb{C}): z \mapsto g(z) \text{ \u00e8 INTERA}$$

Dico che $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = +\infty$. Se cos\u00ec non fosse $\exists z_n \rightarrow \infty: |g(z_n)| \text{ lim.}$

Supponiamo che $g(z_n) \xrightarrow{n} w_0 \in \mathbb{C}$ ma g automorf: $w_0 = g(\infty)$

$\rightarrow \exists I_{w_0}$ t.c. $g(I_{w_0}) \supset I_{w_0}$ ma quindi $g(I_{w_0}) \supset g(z_n)$ def. andando pi\u00f9 l'infinito di g .

Come prima si conclude (all'infinito c'\u00e8 solo un polo) + Liouville

$$(c) \text{Aut}_{\text{ob}}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto c \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \mid \begin{matrix} a \in \mathbb{D} \\ |c|=1 \end{matrix} \right\} = G$$

$$\bullet \text{Buona def: } |g_{a,c}(z)|^2 = \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \cdot \frac{\bar{z}-\bar{a}}{1-a\bar{z}} = \frac{|z|^2 - 2\text{Re}(a\bar{z}) + |a|^2}{1 - 2\text{Re}(a\bar{z}) + |a|^2|z|^2}$$

$$\text{e } |z|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|z|^2$$

$$\Leftrightarrow (1-|z|^2)(1-|a|^2) > 0 \text{ che \u00e8 vero } z, a \in \mathbb{D}$$

G \u00e8 un gruppo ed inoltre \u00e8 omoe a $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ [transitivo, ma non dopp.]

Lemma di Schwartz $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ olo con $f(0)=0 \Rightarrow |f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}, |f'(0)| \leq 1$

Se c'\u00e8 un'uguaglianza $\Rightarrow f$ rotazione: $f(z) = cz, |c|=1$

Dim: $\frac{f(z)}{z}$ \u00e8 olomorfa in $\mathbb{D}$. Sia $z \in \mathbb{D}, |z| < r < 1$

$\rightarrow$ principio del max modulo (in $f(z)/z$):

$$\frac{|f(z)|}{|z|} \leq \sup_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r} \Rightarrow |f(z)| \leq |z| \quad (\lim_{r \rightarrow 1^-})$$

$$\text{e per } z \rightarrow 0 \quad \left| \frac{f(z)}{z} \right| \rightarrow |f'(0)| \Rightarrow |f'(0)| \leq 1$$

Se vale un'uguaglianza $\Rightarrow \left| \frac{f(z)}{z} \right| = 1$ in un qualche pt

ma d'altra parte $\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1 \rightarrow$ principio max modulo

$$\frac{f(z)}{z} = k \Rightarrow f(z) = kz \text{ con } |k|=1$$

Il gr di PGL_2 ha la stessa topologia di $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ (*)

$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ rivestimento:

10/07

(*) Def: $\tilde{X}/X$ è di Galois quando $\text{Aut}(\tilde{X}/X)$ agisce transitivamente sulle fibre
 $\forall x \in X$ e $\forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$, $\text{Aut}(\tilde{X}/X) \ni g : g(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$

- Non tutti i rivestimenti sono di Galois.

- Se $G < \text{Aut}(\tilde{X})$ e costruiamo $X = \tilde{X}/G \Rightarrow$ rivestimento di Galois

ex: Se $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ di grado 2 : $\tilde{x} \in \tilde{X}$, sia $x = \pi(\tilde{x}) : \pi^{-1}(x) = \{\tilde{x}, \tilde{x}'\}$
 allora posso concludere $g(\tilde{x}) = \tilde{x}' : g \in \text{Aut}(\tilde{X}/X)$

Finiamo il caso (c)

Dobbiamo dimostrare $M = \left\{ z \mapsto c \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right\} \supseteq \text{Aut}_0(D)$

M transitivo ($g(0) = -ca$ scelgo $c=1, a \in D$ qualsiasi
 $\text{Stab}(0) = \{ z \mapsto cz \}$ rotazioni, non può essere doppio
 una volta scelto dove va lo 0, qui
 abbiamo visto che pt con lo stesso modulo)

Sia $g \in \text{Aut}_0(D)$: posso supporre (può dimostrare che $g \in M$)
 che g fissi lo 0. CM transitivo : $g(0) = p \in D$
 he M : $h(p) = 0$ (hog)

Sia $h \in \text{Aut}_0(D)$: $h \circ g = \text{id} : h(g(z)) = z \quad \forall z \in D$

e $(h \circ g)'(z) = h'(g(z)) g'(z) = 1 \rightarrow h'(g(0)) g'(0) = 1$
 $\underline{h'(0) \cdot g'(0) = 1}$ ma $\underline{h(0) = 0}$

SCH.
 $\Rightarrow h(0) = 0 \rightarrow |h'(z)| \leq 1 \Rightarrow |h(z)| = |cz|$
 $g'(0) = 0 \rightarrow |g'(z)| \leq 1 \Rightarrow |g(z)| = |z|/c$
 SCH.

ex: $H = \{ z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0 \}$ biolomorfo al disco

$w \in H, w \mapsto \frac{i-w}{i+w}$; $z \in D, z \mapsto i \frac{1-z}{1+z}$ è un biolomorfismo (-)

$\text{Aut}_0(H) = \gamma^{-1} M \gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ ad-bc > 0 \end{matrix} \right\}$

Su $\mathbb{C}$ abbiamo la metrica indotta da $|dz|$ invariante per traslazione.

Su D abbiamo la metrica $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$, che su H diventa $\frac{|dz|}{y}$ con $z = x+iy$

$\frac{2}{1-|z|^2}$
 invariante per $\text{Aut}(D)$

Nel disco
 $d(0, z) = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$

Queste metriche vengono ereditate dalle sdR da cui sono rivestimenti.

Oss: X_1 euclidea, X_2 iperbolica: $f: X_1 \rightarrow X_2$ olomorfa $\rightarrow$ costante
 purché

$\tilde{X}_1 \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X}_2$ e $\tilde{f}$ mappa intesa e limitata $\Rightarrow$ costante
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $X_1 \xrightarrow{f} X_2$

- Studio dei sottogruppi prop. discontinui e senza pt. fissi

Oss: G prop. discontinuo $\Rightarrow G$ discreto

Se $g_n \rightarrow g \Rightarrow g^{-1}g_n \rightarrow Id \Rightarrow K$ intorno cmpt di Id , $g^{-1}g_n \in K \cap K \neq \emptyset$
def. assurdo

Oss: $\Gamma < G$ con Γ discreto non ha pt di accumulazione in G .

Se $(\gamma_n)_n \subset \Gamma$: $\gamma_n \rightarrow \gamma \in G \Rightarrow \gamma_m^{-1}\gamma_n \rightarrow id \in \Gamma \xrightarrow{\Gamma \text{ disc.}} \text{def } \gamma_m = \gamma_n$

(a) $\hat{\mathbb{C}}$: Oss ogni automorfismo ha ^{almeno} un punto fisso.

In fatti $\frac{az+b}{cz+d} = z \Rightarrow cz^2 + dz = az + b : cz^2 + (d-a)z - b = 0$

- se $c=0 \Rightarrow$ ha almeno una sol $\rightarrow$ fissa $\infty : z+b \sim \mathbb{C}$

- se $c \neq 0 \Rightarrow$ ha almeno 2 pt fissi $\rightarrow$ fissa $0, \infty : z \sim \mathbb{C}^*$

(b) $\mathbb{C}$: Sottogruppi discreti di traslazioni $\equiv$ sottogruppi discreti di $(\mathbb{C}, +)$
($az+b=z \Rightarrow z=b/(a-1)$ se $a \neq 1$)

Teo Sia $G < \mathbb{R}^n$ discreto, allora $\exists g_1, \dots, g_n \in G$ lin indipendenti su $\mathbb{R}$ tali che $G = \mathbb{Z}g_1 + \dots + \mathbb{Z}g_n$ (n particolari $r \leq n$).

Dim: Induzione su n :

P.B. $G < \mathbb{R}$ discreto: $G = \{0\}$ oppure $\exists g \in \mathbb{R}: g > 0$

$\Rightarrow |[-g, g] \cap G| = \text{finito} \Rightarrow \exists \delta > 0, \delta \in G : |x| \geq \delta \forall x \in G$
non vuoto

Sia $\eta \in G$: $\eta = q\delta + p$ dove $p \geq 0, p < \delta \rightarrow p \in G, p=0 \vee$
 $\Rightarrow G = \langle \delta \rangle_{\mathbb{Z}}$

P.1: Supponiamo vero fino a $n-1$. $G < \mathbb{R}^n$ discreto, $G \neq \{0\}$

Sia $\gamma \in G - \{0\}$: $\mathbb{R}\gamma$ retta per γ : $G \cap \mathbb{R}\gamma < \mathbb{R}$ discreto
 $\rightarrow \exists g_1$ t.c. $G \cap \mathbb{R}\gamma = \mathbb{Z}g_1$

Considero $V = \mathbb{R}\gamma^\perp$: $\Gamma = \pi(G)$ dove π è la proiezione ortogonale di G su V

Dico che Γ discreto in V

In fatti basta dimostrare che ogni cmpt di V interseca Γ in un numero finito di punti. Sia K compatto in V ,

$K_1 = K \times [0, 1]g_1 = \{k + tg_1 \mid k \in K, t \in [0, 1]\}$ cmpt in $\mathbb{R}^n$

Sia $g \in G$: $\pi(g) \in K$: $g = r + tg_1$ con $r \in K, t \in \mathbb{R}$
 $\exists m$ t.c. $m \leq t \leq m+1$, ma allora

$\tilde{g} = g - mg_1 = r + (t-m)g_1$ ed $\pi(\tilde{g}) = \pi(g) \in K$

$\rightarrow \tilde{g} \in K_1 \cap G \Rightarrow \tilde{g}$ ha un numero finito di possibilità -
e quindi anche r .

$\exists \gamma_1, \dots, \gamma_s \in \Gamma$: $\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \dots + \mathbb{Z}\gamma_s$: $g_i \in G$ t.c. $\pi(g_i) = \gamma_i$
lin indep in $\mathbb{R}$

$\rightarrow G = \mathbb{Z}g_1 + \mathbb{Z}g_2 + \dots + \mathbb{Z}g_s$, infatti se $g \in G$.

Allora $\pi(g) \in \Gamma$ e posso scrivere $\pi(g) = m_1 \gamma_1 + \dots + m_s \gamma_s$, $m_i \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow g - (m_1 \gamma_1 + \dots + m_s \gamma_s) \in V^\perp \cap G = G \cap \mathbb{R} \gamma_1 \xrightarrow{\mathbb{Z} \gamma_1} g = \sum_{i=1}^s m_i \gamma_i$, $m_i \in \mathbb{Z}$

Già interuma il caso $n=2$: $G < \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ sento pt fini.
 Abbiamo 3 tipi:

- 1) $G = \{0\} \rightarrow X = \mathbb{C}$
- 2) $G = \mathbb{Z}g \rightarrow X = \mathbb{C}/\mathbb{Z}g \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^*$ $\because z \mapsto e^{2\pi i z}$
 $g \neq 0, g \in \mathbb{C}$ $\uparrow$ bi-domorfa

Cor: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ domorfa e periodica modulo $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow f = g(e^{2\pi i z})$
 con $g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ do

Dim: f do + periodica mod $\mathbb{Z}$: induce

$$\tilde{f}: \mathbb{C}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{do per la struttura domorfa di } \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

$\begin{matrix} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \downarrow \cong & & \uparrow \\ \mathbb{C}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \end{matrix}$

- 3) $G = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$, $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$, $w_2/w_1 \notin \mathbb{R} \rightarrow T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}w_1 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}w_2$ 10/09
è un toro.

$\triangle \forall w_1, w_2: \mathbb{C}/G \simeq T$ sono tutti omeomorfi fra loro in $\mathbb{R}$
($\rightarrow$ funzioni non $\mathbb{C}$ -lineari)

© D più complicato: è difficile classificare i sottogruppi $\rightarrow$ non lo facciamo.

ex: $-P_1 = \{0, +\infty\} \simeq \mathbb{C}^*$ euclideo
 $\mathbb{C}_m(\mathbb{C})$

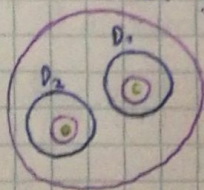
- D^* è iperbolico:
 • non è sferico (purché non è cmpt)
 • non è euclideo: $D^* \hookrightarrow D$ mappa do non cont

$$\mathcal{H} \xrightarrow{f} D^* \quad f(z) = e^{2\pi i z} \quad \mathcal{H} \simeq D. \quad (\mathcal{H} \text{ semipiano superiore})$$

- $-P_1 = \{0, 1, +\infty\} \simeq \mathbb{C} - \{0, 1\}$ è iperbolico:

1. $\pi_1(S) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ non abeliano $\rightarrow$ quindi non è euclideo
2. Se fosse euclideo:
 - non può essere il toro perché non è cmpt
 - non si fosse $\mathbb{C}^*$ darebbe invece $\mathbb{C}^* \hookrightarrow S$
 + iniettività $\leftarrow$ ma non può avere sing. essenziali, quindi
è una [funzione razionale], ma questo non
è possibile.

3. Esiste un compatto $K \subset S$:



$\forall$ cmpt $K' \supset K$, $K' \subset S$: $S - K'$ ha almeno 3 componenti connesse.

Sceglia $K = D_1 \cup D_2$: $\forall K'$ ricammente δ_1, δ_2 cerchi intorno
 t.c. $\delta_1 \cup \delta_2 \cap K' = \emptyset$ a 0, 1

+ K' compatto $\rightarrow$ è contenuto in un disco grande

Mentre invece se faccio lo stesso lavoro su $\mathbb{C}^*$
 riesco a trovare K con K' con solo 2 componenti connesse.

Teo [Picard] Una mappa ologomorfa $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ non costante assume tutti i valori tranne al più un punto

Dim: Supponiamo che ammetta due valori, possiamo assumere (e meno di composizione con una funzione lineare) che siano 0, 1

$$\Rightarrow f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} = S$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow * & \\ g^* & \searrow & D \end{array}$$

$\exists g^*$ sollevamento di f a D (s.c.)
 $\rightarrow g^*$ è costante $\rightarrow f$ è costante.

(*) Supponiamo che esista questa mappa per $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$.
 In realtà si può anche costruire "a mano", lo vedremo più avanti.

ex: - A aperto semplicemente connesso: $A = \mathbb{C}$ o A iperbolico $\rightarrow A \cong D$

Se $A \neq \mathbb{C}$: se A fosse euclideo $\exists f: \mathbb{C} \rightarrow A$ biologomorfa
 ma per Picard $\rightarrow$ può essere solo $\mathbb{C}^*$ che non è s.c.

$$- \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{P}_1 \setminus \{0, 1, +\infty\} : \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ ad-bc=1 \end{matrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$$

G

G t.c. $\mathcal{H}/G \cong S$

* BIOLOMORFISMI

Sia $f: X \rightarrow Y$ ologomorfa con $\tilde{X}, \tilde{Y}$ riv. universali di X e Y

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \pi_X \downarrow & \searrow & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \exists \tilde{f} \text{ olo che solleva } f, f \circ \pi_X = \pi_Y \circ \tilde{f}$$

Siano inoltre G, Γ ^{gruppi discreti} t.c. $X \cong \tilde{X}/G, Y \cong \tilde{Y}/\Gamma$, allora

$$g \in G: \pi_Y(\tilde{f}(gx)) = f(g\tilde{x}) = f(\tilde{x}) = \pi_Y(\tilde{f}(x)), \text{ cioè}$$

$$\exists \gamma \in \Gamma, \text{ con } \gamma = \gamma(x, g) \text{ t.c. } \tilde{f}(gx) = \gamma \tilde{f}(x)$$

$\Rightarrow$ se faccio variare $x \in X$: Γ discreto $\gamma_g(x)$ localmente cost.

Abbiamo: $\boxed{\tilde{f}(gx) = \gamma_g \tilde{f}(x)}$

Inoltre $\tilde{f}$ è univocamente determinata a meno del cambiamento

$$\tilde{f} \mapsto \gamma_0 \tilde{f} \text{ con } \gamma_0 \in \Gamma \text{ fissato}$$

In fatti si avremo anche la sollevamento di f : $\pi_Y(\tilde{f}(x)) = \pi_Y(h(x))$
 $\rightarrow \forall x \in X \exists \gamma(x) \in \Gamma \text{ t.c. } h(x) = \gamma(x) \cdot \tilde{f}(x)$

Γ discreto, $\gamma(x)$ localmente costante $\rightarrow \gamma(x) \equiv \gamma_0$

Vogliamo usare queste cose per capire quando

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}\gamma_1 + \mathbb{Z}\gamma_2$$

Siano L_1, L_2 due reticoli di $\mathbb{C}$ e sia $T_i = \mathbb{C}/L_i$:

Se $\exists f$ allora: $\mathbb{C} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{C}$ dove $\forall \ell \in L_1: \exists m \in L_2 \text{ t.c.}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_1 & \xrightarrow{f} & T_2 \end{array}$$

$$\tilde{f}(z+\ell) = \tilde{f}(z) + m \quad (1)$$

$$\Rightarrow \tilde{f}'(z+\ell) = \tilde{f}'(z) \text{ e' una funzione costante}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(z) = az + b \text{ pu' cui } a, b \in \mathbb{C} \text{ e } b \in L_2 \text{ (} \tilde{f}(0) = b \in L_2 \text{)}$$

e se f non costante $\Rightarrow a \neq 0$ e in (1): $az + a\ell + b = az + b + m : m = a\ell$

$$\Rightarrow \underline{aL_1 \subset L_2} \text{ (cond. necessario e suff. affinché esista } f: T_1 \rightarrow T_2 \text{ non cost.)}$$

Se f e' un biomorfismo: f iniettiva: L_2/L_1 e finito: $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ questo vale l'immersione

$$\Rightarrow T_1 \cong T_2 \Leftrightarrow L_2 = aL_1 \text{ } a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ex: Ogni struttura complessa sul toro $T = (\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ e' una di queste (logorismo come sp. top.)

Dim: Sia data una struttura complessa su T e prendiamo il rivestimento universale con la struttura complessa indotta:

e' $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso $\Rightarrow$ e' $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{D}$.

1. Se e' $\mathbb{C} \rightarrow$ necessariamente $T = \mathbb{C}/L$ con L reticolo per compattezza

2. Se e' $\mathbb{D}$: $\mathbb{D}/G \cong T$ ma ora $G \cong \pi^1(T) = \mathbb{Z}^2$.

Devo capire se in $\mathbb{D}$ esistono sgr prop discontinui, con $G = \mathbb{Z}^2$ (senza pt fissi)

le cose non cambiano per coniugio

Siano g, h generatori pu' G e ragioniamo in $\mathcal{H} \cong \mathbb{D}$ dove ho due gh automorfismi loro $PGL_2^+(\mathbb{R})$

Considero $\frac{az+b}{cz+d} = g$: come automorfismo di $\mathbb{P}^1$, ha 1 o 2 pt fissi

- se ha un solo pt fisso: g e' coniugato a una traslazione $\Rightarrow g(z) = z + b$

(.) Si dimostra che gli elementi che commutano con una traslazione sono solo le traslazioni

$\Rightarrow$ mi danno un gruppo di rango 2 in $\mathbb{R}$

- se ho 2 pt fissi $\Rightarrow c \neq 0$: necessariamente i 2 pt fissi hanno parte reale (sono uno delle due e' in $\mathcal{H}$)

$$\Rightarrow g(z) = \lambda z \text{ con } \lambda \text{ reale}$$

Oss: se ho $g(h(x)) = h(g(x))$ e x pt fisso di $g \Rightarrow h(x)$ pt fisso di g

Cosa succede in superficie:

- SFERICHE: $P^1(\mathbb{C})$ e come prima sotto a $\mathbb{C} \rightarrow$ beh non c'è
- IPERBOLICHE: come prima sotto a D e sia $*$ una legge di gruppo
0 el. neutro

$$\Rightarrow \forall a \in D: z * a \in \text{Aut}(D): z * a = c \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, c = c_a, |\alpha| = 1, |\alpha| = 1$$

$$\begin{aligned} - a * a &= 0: \alpha = a^{*-1} \\ - a * 0 &= -c\alpha = -ca^{*-1}: c = -a^2 \quad (\text{per } a \neq 0) \\ a'' &\rightarrow c = -\frac{a}{\alpha} \text{ costante e } \alpha = -\frac{a}{c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a * \frac{1}{2} = c \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2c}}{1 - \frac{\bar{a}}{2c}} \rightarrow \bar{a} \text{ come funzione olo di } a, \text{ an.}$$

* ISOGENIE

Siano $T_1 = \mathbb{C}/L_1, T_2 = \mathbb{C}/L_2$ tori complessi

Def: $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$ oморfo non costante t.c. $\varphi(0) = 0$ si dice isogenia

→ ogni mappa olo fra tori è indotta da un'affinità: $\varphi([z]_1) = [\alpha z + \beta]_2$

Posso assumere $\beta = 0$: $\varphi([z]_1) = [\alpha z]_2 \quad \alpha \neq 0$

- Inoltre è necessario che $\alpha L_1 \subset L_2$ (per la buona def) ← condizioni molto forti

- È anche suff: $\alpha \neq 0$ t.c. $\alpha L_1 \subset L_2 \rightarrow \varphi([z]_1) = [\alpha z]_2$ isogenia

Oss: un'isogenia è necessariamente:

- surgettiva, con fibre di cardinalità cost = $\deg(\varphi)$
- omomorfismo con nucleo finito ($\alpha^{-1}L_2/L_1$: $[L_2: \alpha L_1] = \text{and nucleo}$) ← grado dell'isogenia
- dà un rivestimento di T_2

Dati $\psi: T_1 \rightarrow T_2, \varphi: T_2 \rightarrow T_3$: $\varphi \circ \psi$ isogenia di $\deg: \deg \psi \deg \varphi$

Se $L_i = \mathbb{Z}w_i + \mathbb{Z}\eta_i$: $\begin{aligned} \alpha w_1 &= a w_2 + b \eta_2 \\ \alpha \eta_1 &= c w_2 + d \eta_2 \end{aligned} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \boxed{\deg \varphi = \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|}$$

$T_i \in \mathcal{H}: \mathbb{Z}T_i + \mathbb{Z}$ toro complesso (n meno di brolo)

→ $T_1 = \frac{aT_2 + b}{cT_2 + d}$: la condizione è T_2 sia immagine di T_1 tramite $GL(2, \mathbb{Q})$

⇒ Le classi di isogenia sono date da $GL^+(2, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathcal{H}$

• $m \in \mathbb{Z} - \{0\} \rightarrow [m]: T \rightarrow T$ isogenia di moltiplicazione:

10/3

$\ker[m] = \frac{1}{m}L/L$ pt di torsione $\cong$ radica dell'1 $[m]: G_m \rightarrow G_m, G_m \cong$

● Abbiamo m^2 pt di torsione del tipo $\frac{a}{m}w_1 + \frac{b}{m}w_2, 0 \leq a, b \leq m$

Def: $\varphi: T_1 \rightarrow T_2$ isogenia, abbiamo $\hat{\varphi}: T_2 \rightarrow T_1$ isogenia duale
dove

$\hat{\varphi}(y) = \deg \varphi \cdot x \in T_1$ dove $x \in \varphi^{-1}(y)$: ben def perché
 $x \in \ker \varphi \rightarrow \deg \varphi \cdot x = 0$

Se $\varphi \leftrightarrow \mu \in \mathbb{C}^*: \mu L_1 \subseteq L_2$ allora $\frac{\deg \varphi}{N} L_2 = \frac{[L_2: \mu L_1]}{N} L_2 \subseteq L_1$

ed infatti si vede $\hat{\varphi} \leftrightarrow [L_2: \mu L_1]/N$

Inoltre:

$\varphi \cdot \hat{\varphi}: T_2 \rightarrow T_2$ è proprio $[\deg \varphi] = [m]$ ora $\deg \varphi \deg \hat{\varphi} = \deg [m] = m$
 $\rightarrow \deg \hat{\varphi} = m$

Si verifica anche che $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$: $\varphi \hat{\varphi} \hat{\varphi} = [\deg \varphi] \hat{\varphi} = \varphi [\deg \varphi], \hat{\varphi} \hat{\varphi} = \hat{\varphi} \hat{\varphi}$

● Prop: $\varphi_1, \varphi_2: T_1 \rightarrow T_2$ isogenie, $\ker \varphi_1 \subseteq \ker \varphi_2$ allora

$\exists \varphi: T_2 \rightarrow T_2$ t.c. $\varphi_2 = \varphi \varphi_1$

Dim: $\varphi_i \leftrightarrow \mu_i \cdot \mu_i^{-1} L_2 / L_1 \subseteq \mu_2^{-1} L_2 / L_1 \rightarrow \mu_2 \cdot \mu_i^{-1} L_2 \subseteq L_2 + \mu_2 L_1$
 $= L_2$

$\Rightarrow \mu_2 \mu_i^{-1}$ stabilizza $L_2 \rightarrow \varphi \leftrightarrow \mu_2 / \mu_1$

• $\Gamma < T = \mathbb{C}/L$ finito e $T' := T/\Gamma$ allora T' è un toro
associato al reticolo $L + \Gamma = L'$

$\rightarrow T \twoheadrightarrow T'$ ha $\ker = \Gamma$ finito $\rightarrow$ ISOGENIA (*)

• Endomorfismi di T : isogenie $T \rightarrow T$ più la mappa nulla.

($\text{End}(T), +, \cdot$) anello senza div 0 [surgettività delle isogenie]
che contiene sempre $\mathbb{Z}$, immerso in $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Necessario: $\mu L \subseteq L = \mathbb{Z}T + \mathbb{Z}$ quindi $\mu T = aT + b$
 $\mu = cT + d$

$N \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{= g_\mu}{\text{e vale}} T = \frac{aT + b}{cT + d}$

Se $\text{End}(T) \neq \mathbb{Z} \rightarrow$ ~~il toro~~ $\text{End}(T)$ è moltiplicazione complessa (CM)
 $cT^2 + (d-a)T - b = 0$

Se $a-d=b=c \rightarrow \mu$ intero, altrimenti μ quadratico in $\mathbb{Q}$

μ a m. razionale $\neq$ num.

Quindi l'isogenia φ annulla ~~il~~ pt di deriv di g_μ : $\varphi^2 - (\text{Tr } g_\mu)\varphi + (\det g_\mu) = 0$
e anche $\bar{\mu}$

$\rightarrow \det g_\mu = \mu \bar{\mu} = \deg \varphi = \mu \cdot \hat{\mu}$ quindi $\varphi \leftrightarrow \mu$

$\hat{\varphi} \leftrightarrow \bar{\mu}$

- $\text{End}(T)$ è discreto in $\mathbb{C}$ (è un grp di matrici intere)
 $\rightarrow$ è un reticolo (stab di L per moltiplicazione)

Riguardo a (*) vale:

Prop: T_1, T_2 tori: $\exists f: T_1 \rightarrow T_2$ isogenia $\Leftrightarrow \exists \Gamma < T_1$ fin: $T_2 \cong T_1/\Gamma$

Dim: ($\Leftarrow$) $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/L = T_1$ e $\bar{L} = \pi^{-1}(\Gamma) < \mathbb{C}$ discreto, teoremi di omomorfismo

$$(!) \quad T_1/\Gamma \cong \mathbb{C}/L/\Gamma \cong \mathbb{C}/\bar{L} = T_2 \quad \text{toro e } T_1 \xrightarrow{\pi} T_1/\Gamma \text{ isogenia}$$

($\Rightarrow$) 1° teo omv (!)

(!) in realtà bisognerebbe far vedere ~~che~~ l'endomorfismo

Duale della somma

Prop: $\widehat{C_1 + C_2} = \widehat{C_1} + \widehat{C_2}$

Dim: vero se $T_1 = T_2$ (il duale è il complesso coniugato o il c.c. CM o il numero stesso albr-munti).

Sommò: $\widehat{C_2} C_1: T_1 \rightarrow T_1 \in \text{End}(T_1)$ quindi

$$\widehat{C_2} (C_1 + C_2) = \widehat{C_2} C_2 + \widehat{C_2} C_1 = \widehat{C_2} C_1 + \widehat{C_2} C_2 = \widehat{C_1} C_1 + \widehat{C_2} C_2 = (\widehat{C_1} + \widehat{C_2}) C_2$$

quindi $(C_2 + C_1) C_2 = (\widehat{C_1} + \widehat{C_2}) C_2$ wlog $\widehat{C_2} \neq 0 \rightarrow$ surgettiva
 $\rightarrow$ ten'

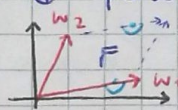
quindi $\wedge$ operazione su End-ismi di $T_1 \rightarrow T_2$.

* FUNZIONI ELLITTICHE

11/04

L reticolo di $\mathbb{C}$: funzioni meromorfe su $T = \mathbb{C}/L$
 $\equiv$ funzioni oloedriche $T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$
 $\equiv$ funzioni meromorfe $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ periodiche rispetto a L (*)

(*) Consideriamo i "parallelogrammi fondamentali"



TEO 1 f è ellittica (senza poli sul bordo) $\Rightarrow \sum_F \text{Res}(f dz) = 0$

$\sum$ finita
 se $|f^{-1}(\infty)| = +\infty$
 avrebbe pt di acc.
 + prolung. analitico

(!) Se non è specificata la variabile, il residuo non è ben definito

Dim: $2\pi i \sum_F \text{Res}(f dz) = \int_{\partial F} f(z) dz = \int_0^{w_1} f(z) dz + \int_{w_1}^{w_1+w_2} f(z) dz + \int_{w_1+w_2}^{w_2} f(z) dz + \int_{w_2}^0 f(z) dz$

Ma ora $\int_{w_1+w_2}^{w_2} f(z) dz = \int_{w_1}^0 f(z+w_2) dz = - \int_0^{w_1} f(z+w_2) dz = - \int_0^{w_1} f(z) dz$

Cor Una funzione ellittica non costante ha almeno 2 poli (in ogni rettangolo L con molteplicità)

Dim: Non può avere un solo polo (se ha poli ne ha almeno 2) e se non avesse poli sarebbe oloedrica $\Rightarrow$ costante.

TEO 2 $\sum_{z \in T} \text{ord}_z(f) = 0$ se $f \neq 0$

Dim: Consideriamo $\frac{f'}{f}$ al posto di f nel teorema 1:

$z_0 \in T$: $m = \text{ord}_{z_0}(f)$: $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$ in I_{z_0}

$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{m(z-z_0)^{m-1} g(z) + (z-z_0)^m g'(z)}{(z-z_0)^m g(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$ con g regolare e $\frac{g'}{g}$ olod in z_0

$\Rightarrow \text{Res}_{f/f'}(z_0) = m \Rightarrow \sum_F \text{Res}_{f/f'}(z) = \sum \text{ord}_z(f) = 0$

Le funzioni meromorfe su $\hat{\mathbb{C}}$ sono funzioni razionali (e anche quindi rispettano T2)

$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \Rightarrow$ grado di f NON è $\deg p - \deg q = \text{ordine a } +\infty$ fin realtà è il $\max(\deg p, \deg q)$

f oloedrica su $\hat{\mathbb{C}}$ ha tanti 0 quanti poli $\rightarrow$ ben def deg

Quindi dal corollario segue che f assume ogni valore almeno due volte

TEO 3: {ai zeri/poli di F in F con mult m_i }, allora:

$\sum m_i a_i \in L$ o equivalentemente $\sum_{z \in T} \text{ord}_z(f) z \in L$

Dim: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial F} z \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_0^{w_1} + \int_{w_1}^{w_1+w_2} + \dots \right) = a w_1 + b w_2$ con $a, b \in \mathbb{Z}$

perché $\int_0^{w_1} z \frac{df}{f} + \int_{w_1+w_2}^{w_2} z \frac{df}{f} = \int_0^{w_1} z \frac{df}{f} - \int_0^{w_1} (z+w_2) \frac{df}{f} = -w_2 \int_0^{w_1} \frac{df}{f} = -w_2 \cdot 2\pi i$

$f_n \mathbb{Z}$ -periodica e del tipo $h(e^{2\pi i t})$ con h meromorfa in $\mathbb{C}^*$
meromorfe e

Per le funzioni ellittiche non funziona: $\varphi(z)$ meromorfa $\Rightarrow h(\varphi(z))$ non
è meromorfa

- Funzione di Weierstrass (risp a L)

$$g_2(z) = g_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) \text{ definisce } f \text{ meromorfa su } \mathbb{C} \text{ con poli doppi precisamente in } L$$

R reale > 0 $|z| \leq R$: scriviamo la somma come $S_1 + S_2$ dove
in S_1 ci sono gli $w \in L$ con $|w| \leq 2R$

$\rightarrow S_1$ è una funzione razionale (# finito di pt) con poli doppi in $L \cap B(0, 2R)$

$$S_2 = \sum_n \frac{-z(z-2w)}{w^2(z-w)^2} : \text{ in modulo: } \sum \left| \frac{z(z-2w)}{w^2(z-w)^2} \right| \leq \frac{3R|w|}{|w|^2|w|-1} = \frac{12R}{|w|^3}$$

$$\text{e } \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{|w|^3} < +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \text{in una corona circolare } \text{il } \# \text{ di } w \in L \cap C \\ \text{è maggiorato da } C \cdot \text{perimetro} \end{array} \right)$$

S_2 converge in $|z| \leq R$
 $\Rightarrow g_2(z)$ meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli doppi in L (ed è pari)

(es): Mostrare che $g_2(z)$ ha periodo L ($aw_1 + bw_2 \in L$ $g_2(z + \bar{z}) = g_2(z)$)
direttamente

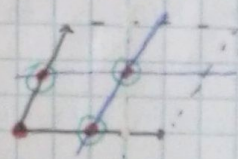
$$\frac{d}{dz} g_2(z) = -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(z-w)^3} \text{ per } z \notin L \text{ dispari}$$

$$\text{Ma allora } \frac{d}{dz} g_2(z+w_0) = -2 \sum_{w \in L} \frac{1}{(z+(w_0-w))^3} \stackrel{\text{cambio variabile}}{=} -2 \sum_{\bar{w} \in L} \frac{1}{(z-\bar{w})^3} = \frac{d}{dz} g_2(z)$$

$$\Rightarrow g_2(z+w_0) = g_2(z) + c(w_0) : \text{ ponendo } z = -\frac{w_0}{2} \text{ e usando } g_2 \text{ pari } \rightarrow c(w_0) = 0$$

$$\text{Oss: } g_2'(-z) = -g_2'(z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2u = 0 \text{ in } T \Rightarrow u = -u \\ u \neq 0 \end{array} \right. : g_2'(-u) = -g_2'(u) = g_2'(u) \rightarrow g_2'(u) = 0$$



g_2' ha un singolo polo di ordine 3 (mod L) $\Rightarrow g_2'$ ha 3 zeri (contati con molteplicità)

e $g_2(z) - g_2(u)$ è una funzione ellittica che si annulla in u con molteplicità 2
e $g_2(z)$ ha un singolo polo doppio in 0

- Campo delle funzioni ellittiche (rel a L)

$\{f: \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C} \text{ meromorfe}\}$ formano un campo (si usa la commutazione)

$L = \mathbb{Z}L : \{f: \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{C} \text{ mer}\}$ è un campo di grado di trasc infinito su $\mathbb{C}$

In fatti $z, e^z, e^{e^z}, \dots$ sono algebricamente indipendenti
 $\Rightarrow h(e^{2\pi i z}), h(e^{2\pi i z e^z}), \dots$ sono alg. indipendenti e periodici $\mathbb{Z}$

L reticolo complesso: studiamo il campo delle f. ellittiche ^{risp} in L 11/06

$\wp_L(z)$ è una funzione ellittica $\Rightarrow$ sicuramente questo campo contiene $\mathbb{C}(\wp_L(z))$

! In generale $h(\wp(z))$ non è meromorfa se h non è razionale $\rightarrow$ in generale in corrispondenza dei poli di $\wp$, h avrà singolarità essenziali

Osserviamo che il campo delle funzioni ellittiche è stabile per derivazione $\leftarrow$ vero?

$$\Rightarrow \mathbb{C}(\wp(z), \wp'(z)) = \left\{ \frac{A(\wp(z), \wp'(z))}{B(\wp(z), \wp'(z))} \mid A, B \in \mathbb{C}[x, y], B(\wp(z), \wp'(z)) \neq 0 \right\}$$

(*) $\wp'(z)$ dispari ma $\forall f \in \mathbb{C}(\wp(z))$ $f = \frac{Q(\wp(z))}{P(\wp(z))}$ pari perché $\wp'(z)$ pari

Teo: Il campo delle funzioni ellittiche (per L) è $\mathbb{C}(\wp(z), \wp'(z))$

Oss: $\mathbb{C}(\wp(z))$ trascendente su $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ alg chiuso e $\mathbb{C}(\wp(z)) \neq \mathbb{C}$)
 $\mathbb{C}(\wp(z), \wp'(z))$ ha grado di trascendenza al più 2 su $\mathbb{C}$ f. ell.

Dim: Ogni f ellittica si scrive come somma di una pari più una dispari f. ell.

$$f(z) = \left(\frac{f(z) + f(-z)}{2} \right) + \left(\frac{f(z) - f(-z)}{2} \right) \text{ e } f \text{ ell} \Rightarrow f(\dots) \text{ ellittica}$$

Basta dimostrare che f ellittica pari $\Rightarrow f \in \mathbb{C}(\wp(z))$

f ell. dispari $\Rightarrow f/\wp'(z)$ è ben def e pari $\rightarrow f = \wp'(z) g$ con $g \in \mathbb{C}(\wp(z))$

Lemma: f pari, allora $\text{ord}_u f = m \Rightarrow \text{ord}_{-u} f = m$
 $u = -u \Rightarrow m$ è pari

Dim: $\text{ord}_u f = \min_k \{ f^{(k)}(u) \neq 0 \}$ e $\left| \frac{f^{(k)}(u)}{k!} \right| = |f^{(k)}(u)| \forall u$
 $\Rightarrow \text{ord}_{-u} f = \text{ord}_u f$

dim 2 teo:

$u = -u : f(u) = 0 \Rightarrow f'(z) = -f'(-z) \Rightarrow f'(u) = -f'(u) \rightarrow f'(u) = 0$

$\Rightarrow$ Se f si annulla in u ha almeno mult. 2

($u = -u \Rightarrow f^{(2k+1)}(u) = 0 \forall k \rightarrow \text{ord}$ è necessariamente pari)

$\rightarrow$ Se ζ è un polo di f $\Rightarrow (\wp(z) - \wp(\zeta))^N f(z)$ non ha polo in ζ
 f meromorfe sul toro (comp) $\Rightarrow$ f ha un # finito di poli $\neq 0$

A meno di moltiplicare per $\prod_{i=1}^N (\wp(z) - \wp(\zeta_i))^{N_i}$ (pari, $\in \mathbb{C}(\wp(z))$) posso supporre che f ha solo poli in 0.

Dimostriamo che allora f è un polinomio in $\wp(z) : f \in \mathbb{C}[\wp(z)]$ per induzione sull'ord₀ f

1. f non ha poli in 0 $\rightarrow$ f cost

2. $\text{ord}_0 f = -m$ pari: $m = 2n$ e $f(z) = \frac{c}{z^{2n}} + \dots \rightarrow \boxed{f(z) - c \wp^n(z)}$
 ha polo di ord $> -m$

Dim 3: moltiplichiamo f per $Q(\rho(z))$ con $Q \in \mathbb{C}[x] - 0$ in modo da eliminare tutti i poli diversi da $0 \in T$.

$\Rightarrow$ Possiamo supporre che f abbia 0 come unico polo in T

$\rightarrow -m = \text{ord}_0 f \geq 2$ per Cor al Teo 1 $\Rightarrow m = 2a + 3b$ $a, b \geq 0$

Scriviamo l'esp di f in 0 : $f(z) = \frac{c}{z^m} + \text{parte con poli di ord} < m$

$\Rightarrow f(z) = c' \rho^a(z) \rho'^b(z)$ con $c' = \frac{c}{-2^b}$ e f ellittica con polo di ord $< m$ in 0 (ed è l'unico in T)
 $\rightarrow$ per induzione trova $f(z) \in \mathbb{C}[\rho(z), \rho'(z)]$

Teo f ellittica e senza poli in $T - \{0\}$, allora $f \in \mathbb{C}[\rho(z), \rho'(z)]$
 e se f è anche pari $\Rightarrow f \in \mathbb{C}[\rho^2(z)]$

Oss: $\rho'^2(z)$ pari $\Rightarrow \rho'^2(z) = A(\rho^2(z))$ con $A \in \mathbb{C}[x] - \{0\}$

$\rightarrow \mathbb{C}(\rho^2(z), \rho'(z)) = \mathbb{C}(\rho^2(z))$ est algebrica

($x^2 - A(\rho^2(z))$ annulla $\rho'(z)$) $\rightarrow (\rho^2(z), \rho'(z))$ annulla $\boxed{y^2 - A(x)}$

Inoltre: $\bullet \deg A = 3$: $A(x) = 4x^3 + \dots$

ρ'^2 ha 6 zeri, $\rho'^2(x) = -\frac{4}{\rho(x)^3} + \dots$
 $\rightarrow \deg A = 3$ (dove 2 in x $2u=0$)

$\bullet A$ non ha radici multiple

Supponiamo $p(x)$ polinomio con una radice multipla: $p(x) = (x-p)^2 \gamma(x)$
 $\deg \gamma = 1$

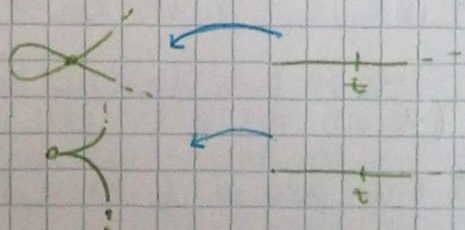
$\Rightarrow y^2 = (x-p)^2 \gamma(x)$ è una CURVA RAZIONALE

$\mathbb{C}(x) \subset \mathbb{C}(x, y) = \frac{\mathbb{C}(x, y)}{y^2 - (x-p)^2 \gamma(x)} = \mathbb{C}(x, \bar{y})$ dove $\left(\frac{y}{x-p}\right)^2 = \gamma(x) = ax+b \rightarrow x = \alpha t^2 + \beta$
 $y = (x-p)t$
 $\rightarrow (x, \bar{y}) = (\alpha t^2 + \beta, \alpha t^3 + (\beta-p)t)$

$\Rightarrow \mathbb{C}(x, \bar{y}) = \mathbb{C}(t)$ campi razionali su $\mathbb{C}$

$$y^2 = x^3 + x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases} \Rightarrow$$

$$y^2 = x^3 \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow$$



Mostriamo che A non ha radici multiple:

① se A avesse radici multiple $\Rightarrow \rho'^2(z) = A(\rho^2(z))$ e quindi se p fosse radice doppia

$t(z) = \frac{\rho'(z)}{\rho^2(z) - p}$ come prima, da cui ricavare

$\mathbb{C}(\rho^2(z), \rho'(z))$ $\rho^2(z) = \alpha t(z)^2 + \beta \rightarrow t(z)$ avrebbe un polo di ordine 1 in 0
 ellittica
 ASSURDO.

② Se $(x-p)^2 \mid A(x) \Rightarrow f^*(z)^2 = (f^*(z)-p)^2 \gamma(f^*(z))$ con γ lineare

Sia z_0 t.c. $f^*(z_0) = p$ (esiste perché $\forall k, f^*(z) = k$ ha 2 c.r.)

$m = \text{ord}_{z_0}(f^*(z) - p) > 0 \Rightarrow m-1 = \text{ord}_{z_0}(f^{*'}(z))$ ma allora

$$2(m-1) = \text{ord}_{z_0}(f^{*'}(z)^2) = \text{ord}_{z_0}((f^*(z)-p)^2 \gamma(f^*(z))) \geq 2m \text{ an.}$$

- Guardiamo $z \mapsto \tilde{W}(f^*(z), f^{*'}(z))$ definita per $z \in T \setminus \{0\}$

Possiamo estenderla in 0 su $\hat{C} = \{y^2 = A(x)\}$

$$z \mapsto \begin{cases} (f^*(z), f^{*'}(z), 1) \in \mathbb{P}^2 \cap \{zy^2 = \tilde{A}(x,z)\} \\ (0, 1, 0) \text{ se } z=0 \end{cases}$$

[Il differenziale è espresso da $(f^{*'}(z), f^{*''}(z)) \neq 0 \quad \forall z$

(Se f^* avesse un ~~più~~ suo doppio $z_0 \Rightarrow f^*(z) - f^*(z_0)$ avrebbe un 0 triplo, an)

$\Rightarrow$ la curva $(f^*(z), f^{*'}(z))$ non ha singolarità

● Inoltre $W: z \mapsto (f^*(z), f^{*'}(z)) \in \{y^2 = A(x)\} \cup \{+\infty\}$ è surgettiva

$(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2: y_0^2 = A(x_0):$ guardo $f^*(z) = x_0$ ha 2 r.c. (ζ^+, ζ^-)

- Se $y_0 = 0 \rightarrow f^*(\zeta^+) = x_0 \Rightarrow A(f^*(\zeta^+)) = f^{*'}(\zeta^+)^2 \rightarrow f^{*'}(\zeta^+) = 0 \quad \checkmark$

- Se $y_0 \neq 0 \rightarrow y_0^2 = A(f^*(\zeta^+)) = f^{*'}(\zeta^+)^2$ e $f^{*'}(\zeta^+) \neq 0 \rightarrow \zeta^+ \neq \zeta^-$
 $\Rightarrow f^{*'}(\zeta^+) = -f^{*'}(\zeta^-)$ anzi $\zeta^+ = -\zeta^-$

$$T = \mathbb{C}/L \Rightarrow W: T \rightarrow \{(x:y:z): zy^2 = A(x,z)\} \text{ t.c.}$$

11/11

$$W(z) = \begin{cases} (f^*(z), f^{*'}(z), 1) & z \neq 0 \\ (0, 1, 0) & z = 0 \end{cases}$$

● $\Rightarrow W$ è iniettiva, surgettiva e dW non è mai nulla

Dim: $\left[z_0 \neq 0 \text{ e } dW(z_0) = 0 \Rightarrow f^{*'}(z_0) = f^{*''}(z_0) = 0 \Rightarrow f^*(z) - f^*(z_0) \text{ ha uno 0 di ordine } \geq 3 \right]$
 Per esercizio, $z_0 = 0$

$$\bullet W(z_1) = W(z_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f^*(z_1) = f^*(z_2) \\ f^{*'}(z_1) = f^{*'}(z_2) \end{cases} \quad f^*(z_i) = f^*(-z_i)$$

Caso 1: $z_1 \neq -z_1 \Rightarrow f^*(z) - f^*(z_1)$ ha come zeri $z_1, -z_1, z_2$ ma allora:
 $z_2 = z_1$
 o $z_2 = -z_1 \rightarrow f^{*'}(z_2) = -f^{*'}(z_1) = f^{*'}(z_1)$

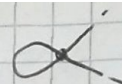
Caso 2: $z_1 = -z_1 \Rightarrow f^*(z) - f^*(z_1)$ può solo avere uno zero doppio in z_1
 $\rightarrow z_2 = z_1$

● surgettività vista la scorsa lezione

$$\Rightarrow \forall z_0 \in T \setminus \{0\}: \begin{cases} f^*(z) - f^*(z_0) \\ f^{*'}(z) - f^{*'}(z_0) \end{cases}$$

si annullano in z_0 (ma una con ordine ≥ 1)

③ Se $y^2 = A(x) = (x-x_0)^2 \lambda(x) \Rightarrow x = \alpha t^2 + \beta$
 $y = t(\alpha t^2 + \beta - x_0)$



$\rightarrow$ due $t = \pm \sqrt{\frac{x-\beta}{\alpha}}$ che mi danno lo stesso W en. ?

Se $y^2 = (x-x_0)^3 \cdot c \Rightarrow \rho'(t)^2 = c(\rho(t) - x_0)^3$ *problema con $dW=0$*

Adesso: $\tilde{C} = \{(x:y:t) : y^2 = A(x,t)\}$ ha una struttura complessa
 $\Rightarrow y^2 - A(x) = 0$

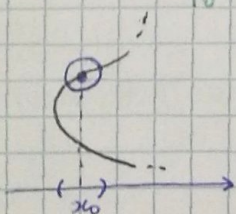
Allora se $(x_0, y_0) \in C$ e $y_0 \neq 0 \Rightarrow y = S(x-x_0)$ per $x \in I(y_0)$

[A cubica, senza rad. multi]

E lo stesso ragionamento si può fare

per qualunque curva $y^2 = A(x)$ omettendo l'ipotesi che sia legata a T

$\rightarrow$ All'infinito: $\frac{\rho}{\rho'}$ ha un polo di ordine $1 \sim \infty$
 $\rightarrow x = ty$



Inoltre via mappe di Weierstrass posso indurre su $\tilde{C}$ una struttura complessa.

$W: T \rightarrow \tilde{C} \Rightarrow W^{-1}: \tilde{C} \rightarrow T = \mathbb{C}/L$

$\rightarrow W$ biendomorfismo di $T \leftarrow \tilde{C}$

e la struttura complessa indotta coincide con quella naturale

Grado di frazioni in $\mathbb{C}(t)$

Siano $p, q \in \mathbb{C}[t], q \neq 0 \Rightarrow \deg \frac{p(t)}{q(t)} = \begin{cases} \max(\deg p, \deg q) \\ |f''(b)| \text{ per } b \text{ generico in } \mathbb{C} \end{cases}$
5. f''(b) è un insieme finito che può dipendere da f

Prop: $\deg f = [\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(f)]$ se $f \notin \mathbb{C}$

Dim: $\mathbb{C}(f) = \{ \varphi(f) \text{ con } \varphi \in \mathbb{C}(x) \} \subset \mathbb{C}(t)$

Mostriamo che $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(f)] < +\infty$ mostrando che $t \in \mathbb{C}(t)$ è alg su $\mathbb{C}(f)$.

$f = f(t) = \frac{p(t)}{q(t)} \Rightarrow p(t) = f q(t) \rightarrow t$ verifica $P - fQ$

Ora $\deg \underbrace{(p(x) - fQ(x))}_{\phi(x)} = \max(\deg p, \deg Q) \quad (f \notin \mathbb{C})$

Questo mi dice che $[\mathbb{C}(t) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg f$ e ora

$\phi(x) = \psi(f, x) \in \mathbb{C}[f, x]$ irreducibile in $\mathbb{C}[f, x]$ *(linear in f)*
 $\sim$ alg. indep. $+ (P, Q) = 1$

$\Rightarrow$ Lemma di Gauss, ϕ irreducibile in $\mathbb{C}(f)[x]$
(perché ϕ primitivo in f)

$\tilde{\phi}(f, t) = 0 \rightarrow \tilde{\phi}(t, x)$

Se $\phi(t)$ è il pol. min di t , $\deg f = f > d = \deg \phi \Rightarrow \phi(x) = x^d + \dots + c_0(f)$

⑥ generico: $\exists a_1, \dots, a_s + c. f(a_i) = b \forall i \rightarrow \phi(b, a_i) = 0$ in s valori
 $\Rightarrow \phi_b(x) = x^d + c_{d-1}(b)x^{d-1} + \dots + c_0(b)$ poly in x con s radici distinte

$c_i(b)$ dif. $\forall i$

$$-y^2 = Ax, \quad P'(z)^2 = A(P(z))$$

11/13

Sia f funzione ellittica non costante, definiamo $\deg f = \#\{z \text{ di } f \text{ con moltep.}\}$

● Prop: $\forall c \in \mathbb{C}, \deg f = \#\{z \in T : f(z) = c, \text{ con moltep.}\} = \sum_{z \in T} (\text{ord}_z(f-c) \vee 0)$

Dim: f ellittica: $\frac{f}{f-c}$ ha come zeri gli zeri di f con la loro moltep.
i poli sono gli zeri di $f-c$ con la loro moltep.

$$c \neq 0$$

e so che $\#\text{zeri} = \#\text{poli} \Rightarrow \#\text{zeri di } f-c \checkmark$

(.) Prop: $\deg f = [\mathbb{C}(P(z), P'(z)) : \mathbb{C}(f)]$

- $y^2 = A(x)$ con A cubico senza radici multiple

Bisogna verificare che la superficie che troviamo è connessa (se sappiamo che proviene da un toro è automatico)

Prop: $C = \{(a,b) \in \mathbb{C}^2 : b^2 = A(a)\}$
e sia F sottoinsieme finito di $C \Rightarrow C-F$ è connesso

● Dim: Possiamo supporre che F contenga gli z con $b=0$, e $(a,b) \in F \Rightarrow (a,-b) \in F$
Allora la mappa: $\dots : C-F \rightarrow \mathbb{C} - (F)$ è un recoprimento

(In ogni pt la derivata è $\neq 0 \rightarrow$ ho le inverse locali)

Sia $(a,b) \in C-F$ e sia S^+ la sua componente connessa,
 S^- la componente connessa di $(a,-b)$

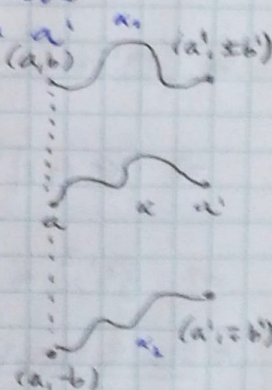
1. $S^+ \cup S^- = C-F : (a',b') \in C-F : \exists \alpha$ in $\mathbb{C} - (F)$ che connette a con a'

$\forall a \in \mathbb{C} - x(F)$
 (a,b) e $(a,-b)$
sono nella stessa comp. connessa
 $\rightarrow$ ok

- se $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) \Rightarrow (a,b), (a,-b)$
sono nella stessa comp. connessa
Ma ora $\{ \alpha : (a,b), (a,-b) \}$ sono nella stessa comp. connessa?
è aperto $\rightarrow \emptyset$ o tutto
è chiuso

$\exists a = (a,b)$ e $(a,-b)$
sono in comp. connessa diverse

- se $\alpha_1(1) \neq \alpha_2(1) \Rightarrow (a',b') \in S^+$ se $\alpha_1(1) = (a',b')$
 $\in S^-$ altrimenti



2. $A(a_0) = 0 : a$ in un disco centrato in a_0 t.c. non ci siano altre radici di A



Un sollevamento di α è un cammino fra (a,b) e $(a,-b)$

- $y^2 = A(x)$ irriducibile, $A = k[x]$ di $\deg A = 3$ separabile, si può costruire

Campo di funzioni (in $\mathbb{C}$ Avendo $P(z) : (x, \xi) \in \mathbb{C}(P(z), P'(z))$)

$k(x) \hookrightarrow k(x, \xi) = \frac{k(x)[y]}{(y^2 - A(x))}$ è il campo delle funzioni di C

$$\xi^2 = A(x)$$

$$\left\{ \frac{P(x, \xi)}{Q(x, \xi)} : \text{t.c. } y^2 - A(x) \mid Q(x, \xi) \right\} = \left\{ a(x) + \xi b(x) : a, b \in k(x) \right\}$$

$$f^2(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_L \left\{ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right\} \text{ e cerco l'espansione di Laurent in } 0$$

$$\frac{1}{(z-w)^2} = \frac{1}{w^2} \frac{1}{(1-z/w)^2} = \frac{1}{w^2} \cdot \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{z}{w}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{1}{w^2} \sum_{n \geq 2} n \left(\frac{z}{w}\right)^{n-1} = \sum_{n \geq 2} n \left(\frac{z^{n-1}}{w^{n+1}}\right)$$

$$\text{quindi } f^2(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_L \sum_{n \geq 2} n \frac{z^{n-1}}{w^{n+1}} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 2} n z^{n-1} \sum_L \frac{1}{w^{n+1}}$$

$$\rightarrow f^2(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 1} (n+1) S_{n+2} z^n \text{ con } S_m = \sum_L \frac{1}{w^m} \quad m \geq 3$$

$$\text{ma } S_m = 0 \text{ se } m \text{ dispari} \rightarrow f^2(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) S_{2n+2} z^{2n}$$

$$f^2'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1) S_{2n+2} z^{2n-1}$$

$$\Rightarrow (f^2'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{4}{z^3} \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1) S_{2n+2} z^{2n-1} + (\dots)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{4 \cdot 6}{z^2} S_4 - 80 S_6 + O(z)$$

$$f^2(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3}{z^4} \sum_{n \geq 1} (2n+1) S_{2n+2} z^{2n} + \frac{3}{z^2} \left(\sum_{n \geq 1} \dots \right)^2 + O(z)$$

$$= \frac{1}{z^6} + \frac{3 \cdot 3}{z^2} S_4 + 3 \cdot S_6 + O(z) \quad O(z)$$

$$\Rightarrow (f^2'(z))^2 - 4(f^2(z))^3 = -\frac{60}{z^2} S_4 - 140 S_6 + O(z)$$

$$\Rightarrow (f^2'(z))^2 - 4(f^2(z))^3 + \boxed{60 S_4} \cdot f^2(z) + \boxed{140 S_6} = 0$$

funzione senza poli fuori da L e 0 in 0

$$\Rightarrow f'^2 = 4f^3 - g_2 f^2 - g_3$$

* DISCRIMINANTE $t^3 + at^2 + bt + c = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)(t-\alpha_3) : a = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
 $\rightarrow \text{disc} = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2 = q(a, b, c)$
 $b = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$
 $c = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$
 $\sum_{i=1}^n \gamma_i a^m b^l c^n$

$$\text{dove } m + 2l + 3n = 6$$

$$\text{Se il polinomio e t.c. } a=0 \rightarrow (l, n) \in \{(3, 0), (0, 2)\}$$

almeno da tre

$$\Rightarrow \text{disc} = \gamma_1 b^3 + \gamma_2 c^2 \text{ e per } b=0, c=1 : d_i = \zeta_3^i$$

$$\Rightarrow \text{disc} = -4b^3 - 27c^2$$

$$c=0, b=1 : 0, \pm i$$

- (g_2, g_3) soddisfa $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$

12/02

$$\Rightarrow \text{disc} = -4\left(-\frac{g_2}{4}\right)^3 - 27\left(-\frac{g_3}{4}\right)^2 = \frac{g_2^3 - 27g_3^2}{4^2} : \Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

Da quanto già dimostrato abbiamo $\Delta \neq 0 \forall$ reticolo L
(e vale $\Delta = 16 \prod_{i < j} (d_i - d_j)^2$)

Inoltre conosciamo gli zeri di $4x^3 - g_2x - g_3$: sono

$$g_2(z) \text{ con } g_2'(z) = 0 : L = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2 : w_3 = w_1 + w_2 \\ \rightarrow z \in \left\{ \frac{w_i}{2} : i = 1, 2, 3 \right\}$$

$$\rightarrow \alpha_i = g_2\left(\frac{w_i}{2}\right) \text{ (e sono tutti distinti) e dice } g_2'(z) = 4 \prod_{i=1}^3 (g_2(z) - g_2\left(\frac{w_i}{2}\right))$$

- ex: $\mathbb{Z}[i] = L$ (Reticolo di Gauss)

$$\text{Oss: } g_2(\lambda L) = \lambda^{-4} g_2(L), g_3(\lambda L) = \lambda^{-6} g_3(L)$$

Preso $\lambda = i : g_3(iL) = -g_3(L)$ ma $iL = L \Rightarrow g_3(L) = 0$

$\Rightarrow$ in questo caso il polinomio è $4x^3 - g_2x$ (e $g_2 \neq 0$ perché le radici sono distinte)

$$\mathbb{Z}[\zeta_3] = L \text{ (Reticolo di Eisenstein): } g_2(\zeta_3 L) = \zeta_3^{-4} g_2(L) : g_2(L) = 0$$

- Ogni curva piana cubica in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{A}^1}$ può mettere in forma $y^2 = A(x)$ dopo opportuna transf. lineare
non ha radici mult. (non-sing.)

Ogni curva non singolare, ha un pt. di flesso $\mapsto +\infty$

Ogni toro corrisponde ad una cubica in forma di Weierstrass
tale che il coef di x^2 in $A(x)$ è uguale a 0 cioè $A(x) = 4x^3 + ax + b$

Siano $y^2 = A(x)$, $v^2 = B(u)$ con A, B polinomi cubici senza radici multiple

$$\begin{cases} u = \phi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases} \text{ con } \phi, \psi \in \mathbb{C}(x, y) \text{ e } \begin{cases} x = \alpha(u, v) \\ y = \beta(u, v) \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}(u, v)$$

- funzioni razionali fun. razionali

$\Rightarrow$ le curve sono BIRAZIONALMENTE EQUIVALENTI

(A priori le transf. razionali non sono definite ovunque, ma nel proiettivo sì)

$\mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}[z]$, $\deg A = 3$ monico, senza radici multiple, coef di $x^2 = 0$

$$\text{cioè } y^2 = A(x) = x^3 + ax + b : \begin{matrix} x \mapsto \lambda^2 x \\ y \mapsto \lambda^3 y \end{matrix} : y^2 = x^3 + \lambda^{-4} a x + b \lambda^{-6}$$

linear

Scelgo un parametro λ in modo da ridurre di uno la libertà sui coef.

$$\frac{a^3}{b^2} \text{ non assume il valore } -\frac{4}{27} \rightarrow \frac{a^3}{4a^3 + 27b^2} \text{ equivalente a } \frac{a^3}{b^2}$$

$$\left[\text{Se } A(x) \text{ viene da } L : J_L = \frac{g_2^3}{\Delta} \text{ invariante del reticolo} \right] \leftarrow j\text{-invariant delle curve ellittiche}$$

$\rightarrow$ Ho UN SOLO PARAMETRO che puo' spaziarlo delle E ellittiche.

A priori usando altre trasformazioni (birazionali?) potrebbe sparire

Ma $J_L = \frac{g_2^3}{\Delta}$ per $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$, $\tau \in H \Rightarrow J_L = \tilde{J}(\tau)$ olo in $\mathbb{C}$ non costante

J si annulla in Eisenstein
non si annulla in Gauss

Se ad esempio tutte le curve ellittiche fossero birazionalmente equivalenti

$\Rightarrow$ preso due qualunque curve ell. associate a un toro sarebbero equivalenti

Ma due curve ell. associate a tori sono eqv $\Leftrightarrow$ i tori sono omotetici

(*) conto $\Leftrightarrow J$ e lo stesso
 $\Leftrightarrow J$ e cost.

$y^2 = A(x)$, (x_0, y_0) sulla curva: $y_0 \neq 0 \Rightarrow x - x_0$ parametro locale $y = X(x - x_0)$
 $y_0 = 0 \Rightarrow y$ parametro locale

Quindi se A, B birazionalmente eq.

$y^2 = A(x)$, $u^2 = B(u)$ con $\begin{cases} u = \alpha(x, y) \\ v = \gamma(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \alpha(u, v) \\ y = \beta(u, v) \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha^2 = B(\alpha)$, $\beta^2 = A(\alpha) \rightarrow$ sono monomiali quindi omomorfe in P^2
 $\Rightarrow t=0$ le scuo che $(\frac{\alpha(t)}{t^n}, \frac{\beta(t)}{t^n}, 1)$
 $\Rightarrow n = \text{ord } t$

(In dim 2, $\frac{x}{y}$ non si regolarizza)

$\Rightarrow$ Mappe razionali fra le coordinate inducono mappe fra le curve olo morfe in P^2

$\rightarrow$ BIOMORFISMO $\Rightarrow$ STR. COMPLESSE BIOMORFE

$\cong: \mathbb{C}(x, y) \cong_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(u, v)$

Quindi L, M reticoli: $\mathbb{C}(P_L, \beta_L) \cong \mathbb{C}(P_M, \beta_M) \Leftrightarrow L \cong M$

- ISOMORFISMI birazionali fra $y^2 = A(x) = E_A$, $y^2 = B(x) = E_B$: $\Phi: E_A \rightarrow E_B$ non

e supponiamo $\Phi(\infty_A) = \infty_B \Rightarrow V = \{f \in \mathbb{C}(x, y): f \text{ ha al max un polo di ordine } 2 \text{ a } \infty\}$
dove il polo e rispetto a un param. locale (x/y)

Se $y^2 = A(x)$ proviene da un toro: $f \in V: f = \frac{k}{z^2} + \dots$ $f = k\beta(z)$ non ha nessun polo $\rightarrow$ costante

12/04

$J = \frac{g_2^3}{\Delta}$ dove $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$: osserviamo che J e unico a meno di trasformazioni lineari

infatti se $\begin{cases} y = 4x^3 - g_2x - g_3 & (1) \\ y = 4x^3 - g_2'x - g_3' & (2) \end{cases}$ e $J = J'$ cioè $\frac{g_2^3}{g_3^2} = \frac{g_2'^3}{g_3'^2}$
 $\Rightarrow \left(\frac{g_2}{g_2'}\right)^3 = \left(\frac{g_3}{g_3'}\right)^2: \frac{g_2}{g_2'} = \lambda^2, \frac{g_3}{g_3'} = \lambda^3 \quad \lambda = \frac{g_2'g_3}{g_3'g_2}$

$\rightarrow (1): y^2 = 4x^3 - \lambda^2g_2'x - \lambda^3g_3' \rightarrow (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda^{3/2}y)$ e toro (2)

→ date due curve provenienti da un tori con $J=J' \rightarrow$ sono biolomorfe
 In fatti L, L' tori: $J_L = J_{L'} \rightarrow y = A_L(x), y = A_{L'}(x)$ sono domorfe $\rightarrow$ biolomorfe
 $\rightarrow$ i due tori sono biolomorfi $\Rightarrow L$ e L' sono omotetici

[Questo in particolare implica che J non è costante come funzione del reticolo - non tutti i reticoli sono omotetici]

* Vogliamo dimostrare che non tutte le cubiche sono birazionalmente equiv.

In particolare vediamo che quelle indotte dai tori non sono biraz. equiv.

[Vedremo che ~~due~~ due cubiche sono birazionalmente equiv $\Rightarrow J=J'$]

Oss: se L, L' corrispondono agli stem $g_2, g_3 \Rightarrow$ sono uguali

In fatti: avere gli stem $g_2, g_3 \Rightarrow J=J' \Rightarrow$ reticoli omotetici, $L' = \lambda L$
 ma allora $g_2' = \lambda^{-4} g_2, g_3' = \lambda^{-6} g_3 \rightarrow$ se:

- $g_2, g_3 \neq 0 \rightarrow \lambda^2 = 1 \rightarrow |\lambda| = 1$ (ma i ret. sono simmetrici)
- $g_2 = 0 \rightarrow g_3 \neq 0$ quindi $\lambda^6 = 1$ ma in questo caso moltiplicare per ζ_6 è un automorf di L

In fatti: $\Lambda = \mathbb{Z}[\zeta_3] : y^2 = 4x^3 - k$ con $k = g_3(\Lambda)$
 ma quindi, L e L' sono omotetici a Λ

Ma Λ è fissato da una radice $\zeta_6 \rightarrow$ anche L, L' lo sono

- $g_3 = 0 \rightarrow$ ragionamento simile con $\Lambda = \mathbb{Z}[i]$

Date: $y^2 = 4x^3 - ax - b : E$ e supponiamo esista un isomorfismo birazionale
 $y^2 = 4x^3 - a'x - b' : E'$
 $\mathbb{C}l : E \rightarrow E'$
 con $\mathbb{C}l(\infty_E) = \infty_{E'}$

$\Rightarrow$ Voglio dimostrare che le cubiche hanno lo stesso J

Dim: Sia $V = \{ f \in \mathbb{C}(E) : f \text{ ha al più un pto doppio a } +\infty \text{ (e nessun altro polo)} \}$

Dimostriamo che $V = \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot x$

① x ha un pto di ordine 2 a ∞ , infatti
 scegliendo $t = x/y$ parametro locale a $\infty : x = ty$, quindi

$$\begin{aligned} \infty \in E &\mapsto y^2 = 4t^3 y^3 - aty - b & u = \frac{1}{y} : \mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(t, u) \\ &\mapsto u = 4t^3 - atu^2 - bu^3 & \Rightarrow (u, t) = (0, 0) \end{aligned}$$

quindi $\uparrow$ la derivata rispetto a $u \neq 0$
 quindi t parametro locale, $\frac{dx}{dt} \neq 0$

$\rightarrow u = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \dots = 4t^3 + \dots$
 quindi l'ordine di u in 0 è esattamente 3
 e $x = ty$ ha un pto di ordine 2

$\Rightarrow V \supset \mathbb{C} + \mathbb{C}x$

2. $f \in V \Rightarrow (x, y) \mapsto (t, u) : f = \frac{C_2}{t^2} + \frac{C_1}{t} + \gamma_0 + \dots$

quindi $g = f - c \cdot x = \frac{\gamma_1}{t} + \gamma_0 + \dots$ per un qualche c

Dico che g ha al più un polo semplice a ∞ e nessun altro polo

Caso 1: g non ha nessun altro polo: g è omomorfa su tutto $\mathbb{C}(E)$ senza poli
ma quindi poiché la curva è c.m.p.t. $\rightarrow g$ costante

Caso 2: g ha un polo semplice a ∞ (e nessun altro polo)

$x - \alpha g^2 - \beta g$: posso scegliere α, β in modo che queste non abbia poli a ∞

$\rightarrow$ non ha altri poli e come sopra: $x - \alpha g^2 - \beta g = \text{costante} = \gamma$

$\Rightarrow x = \alpha g^2 + \beta g + \gamma = q(g)$ con $\deg q = 2$
 $y = r(g)$ con $\deg r = 3$

$\rightarrow r^2(g) = 4q^3(g) - aq(g) - b$

ma allora $r^2(g) - 4q^3(g) - aq(g) - b = p(g)$ su $\mathbb{C}(E)$
e g non costante, quindi ho l'identità di polinomi

$r^2(z) = 4q^3(z) - aq(z) - b$

$= 4(g(z) - \alpha)(g(z) - \beta)(g(z) - \gamma)$ e ogni radice ha ordine pari

$\rightarrow$ necessariamente: $\begin{cases} q(z) - \alpha = \square \\ q(z) - \beta = \square \\ q(z) - \gamma = \square \end{cases}$ di cui linearmente $\deg q = 2$

ma dividendo il LHS e $q'(z) \rightarrow$ i 3 $\square$ sono uguali a meno di cost. ASS.

$\rightarrow$ Abbiamo dimostrato che $V = \mathbb{C} + \mathbb{C}x$

Volevamo dimostrare che dato $\phi: E \rightarrow E'$ con $\phi(\infty) = \infty' \Rightarrow J = J'$

Abbiamo $V = \mathbb{C} + \mathbb{C}x$, $V' = \mathbb{C} + \mathbb{C}u$ e

$f \in V'$: $f \circ \Phi \in V$ (perché $\infty \mapsto \infty'$ + isomorfismo) $\Rightarrow u \circ \Phi \in V$ cioè $u \circ \Phi = \alpha x + \beta$

Analogamente si dimostra che $W = \{f \in \mathbb{C}(E) : f \text{ ha al più un polo triplo a } \infty\}$

$\Rightarrow W = \mathbb{C} + \mathbb{C}x + \mathbb{C}y$, $W' = \mathbb{C} + \mathbb{C}u + \mathbb{C}v$

$\rightarrow$ anche $v \circ \Phi = \gamma y + \delta x + \eta$

Prop: $f: E \rightarrow \mathbb{P}^1$ oloedomorfa $\rightarrow f \in \mathcal{C}(E)$

Dim: 1. E bidomorfa con $T \cong \mathbb{C}/L$, allora $\varphi: \mathbb{C}/L \rightarrow \mathbb{P}^1$ oloedomorfa
 che quindi induce $\tilde{\varphi}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ oloedomorfa: FUNZ. ELLITTICA
 $\rightarrow \tilde{\varphi} \in \mathcal{C}(\mathcal{P}, \mathcal{P}') = \mathcal{C}(E)$ e quindi anche $f \in \mathcal{C}(E)$

2. Quando $f(x,y) = f(x,-y)$ e loc. oloedomorfa in tutti i pt e dipende solo dalla x

$\Rightarrow$ induce $\tilde{f}_s$ oloedomorfa da $\mathbb{P}^1$ in $\mathbb{P}^1 \rightarrow \tilde{f}_s$ razionale $\in \mathcal{C}(x)$

Uguale $f(x,y)f(x,-y) = f_p: \tilde{f}_p \in \mathcal{C}(x)$

$\rightarrow$ trovo $f^2 - f_2 \cdot f + f_p = 0: f = \frac{f_2 \pm \sqrt{\dots}}{2}$

a meno di traslazioni $f^2 = q$ con q razionale e le sol sono

f e $f \circ \phi$ dove $\phi(x,y) = (x,-y)$ e $f \circ \phi = -f$

Considero $g = yf \Rightarrow g \circ \phi = -y(-f) = g \rightarrow g \in \mathcal{C}(x)$
 $\rightarrow f \in \mathcal{C}(x,y)$

• Isogenie fra tori: $\varphi: T_1 \rightarrow T_2, \varphi(0) = 0$, non costante e oloedomorfa 12/09

1. φ è surgettiva:

2. φ è rappresentata da una moltiplicazione: $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ t.c. } \varphi([z]_{T_1}) = [\lambda z]_{T_2}$

Si ha inoltre che $\lambda L_1 \subset L_2$

$\rightarrow$ dati le cubiche corrispondenti: $y^2 = 4x^3 - a_1x - b_1 \leftrightarrow T_1$
 $y^2 = 4x^3 - a_2x - b_2 \leftrightarrow T_2$

Prop: L'isogenia viene rappresentata da funzioni razionali sulle cubiche

$T_1 \xrightarrow[\text{mappe di } W]{W_1} E_1$
 $\varphi \downarrow \tilde{\varphi} \downarrow$
 $T_2 \xrightarrow[\text{mappe di } W]{W_2} E_2$
 esiste una mappa (perché le mappe di W sono biomorfismi) $\rightarrow \tilde{\varphi}$ è RAZIONALE
 $\tilde{\varphi}(x,y) = (R(x,y), S(x,y))$
 con $R, S \in \mathcal{C}(x,y)$

$\rightarrow S^2 = 4R^2 - a_2R - b_2$

Dim: $\mathcal{P}_1^*(z), \mathcal{P}_1'^*(z)$ e $\mathcal{P}_2^*(z), \mathcal{P}_2'^*(z)$ $\rightarrow \mathcal{P}_2^*(\lambda z)$ restano
 periodici risp a L_1 periodici risp a L_2 $\mathcal{P}_2'^*(\lambda z)$ meromorfe

dato $w \in L_1: f(z+w) = \mathcal{P}_2^*(\lambda z + \lambda w) = \mathcal{P}_2^*(\lambda z) = f(z)$ periodica mod L_1

$\rightarrow f$ è ellittico rispetto a L_1 , cioè $f \in \mathcal{C}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_1')$ $\rightarrow \mathcal{P}_2^*(\lambda z) = R(\mathcal{P}_1^*(z), \mathcal{P}_1'^*(z))$

e similmente

$\mathcal{P}_2'^*(\lambda z) = S(\mathcal{P}_1^*(z), \mathcal{P}_1'^*(z))$

ma $\tilde{\varphi} = W_2 \circ \varphi \circ W_1^{-1}(x,y) = (\mathcal{P}_2^*(\lambda z), \mathcal{P}_2'^*(\lambda z)) = (R(\mathcal{P}_1^*(z), \mathcal{P}_1'^*(z)), S(\mathcal{P}_1^*(z), \mathcal{P}_1'^*(z)))$

Inoltre $\tilde{C}: E_1 \rightarrow E_2$ razionale $\tilde{C}(\infty_1) = \infty_2 \rightarrow$ è un isomorfismo
(per la legge di gruppo $\downarrow$)

(*) es: T_1 toro, $C: T_1 \rightarrow T_2$ un'isogenia C si dice ciclica se $\ker C$ ciclico
isogenia
Dimostrare che esistono T_3 toro, $p: T_3 \rightarrow T_2$ isomorfismo
 $\psi: T_1 \rightarrow T_3$ isogenia ciclica $C = N\psi$

($\ker C \leq \text{toro} \rightarrow$ finito e $\ker C \simeq C_1 \times C_2$ con $\text{ord } C_1 \mid \text{ord } C_2$)

* LEGGE DI GRUPPO

$$T = \mathbb{C}/L, \quad W: T \rightarrow E = \{y^2 = 4x^3 - g_1x - g_2\} \cup \{\infty\}$$

• $z_1, z_2 \in T \rightarrow W(z_1) = (x_1, y_1) \in E : W(z_1 + z_2) = ?$
 $z_1, z_2 \neq 0$ $W(z_2) = (x_2, y_2)$

suppongo $p(z_1) \neq p(z_2) \rightarrow$ trova a, b : $p'(z_1) = a p(z_1) + b$
 $p'(z_2) = a p(z_2) + b$

$\Rightarrow p'(z) - a p(z) - b \in \{ \text{funz. ellittiche nulli a } L \}$

ha zeri z_1, z_2 e un polo di ordine 3 all'origine $\rightarrow \exists z_3$ altro zero:

Inoltre sappiamo che in T : $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \rightarrow z_3 = -(z_1 + z_2)$
 $\text{Teo 3} \uparrow$

$\rightarrow p'(-z_1 - z_2) = a p(z_1 + z_2) + b$
 $-p'(z_1 + z_2)$ $\uparrow$ $p(z_1 + z_2)$

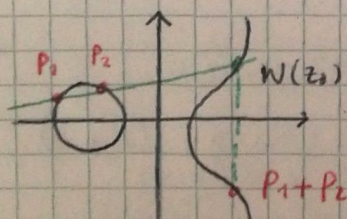
o anche che $W(-z) = (x_0, -y_0)$ e $W(z) = (x_0, y_0)$ $W(z) = (p(z), p'(z))$

$\rightarrow W(z_1 + z_2), W(z_1), W(z_2)$ stanno sulla retta $y = ax + b$

e $W(-(z_1 + z_2))$ è il simmetrico di $W(z_1 + z_2)$ rispetto all'asse delle x

$ax + b \rightarrow a = \frac{p'(z_1) - p'(z_2)}{p(z_1) - p(z_2)}$

$b = \frac{p(z_1)p'(z_1) - p(z_2)p'(z_1)}{p(z_1) - p(z_2)}$



$\begin{cases} y^2 = f(x) \\ y = ax + b \end{cases} \rightarrow 4x^3 - g_1x - g_2 - (ax + b)^2 = 0$
 $(x - p(z_1))(x - p(z_2))(x - p(z_3))$

e so che $-\frac{a^2}{4} = \left[\frac{x^2}{4} \right] = -(p(z_1) + p(z_2) + p(z_3))$

$\rightarrow p(z_3) = \frac{a^2}{4} - p(z_1) - p(z_2)$ e $p'(z_3) = ax_3 + b$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 x_3 y_3

Oss: gli automorfismi di una cubica non singolare formano un gruppo transit. (translations)

→ ogni isomorfismo di una curva in un'altra, se manda ∞ in ∞ , è meno di trasf. lineari

$\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ isomorfismo (mappa bilineare) $\tau \circ \varphi(\infty_1) = \infty_2$ con τ trasf. lineare
 $T(P) = P + \infty_2 - \varphi(\infty_1)$

⇒ $\tau \circ \varphi$ si esprime con f lineari delle coordinate

$\varphi = \tau^{-1}$ (funz. lineari delle coordinate)

⇒ Per studiare il sottogruppo degli automorfismi, basta ricordarsi al caso in cui l'origine è fissata

→ automorfismi che fissano lo cubico: ± 1 (in tutto 6 automorfismi)

• $\mathbb{C}(x, y)$, $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$

Un divisore su una curva $\mathcal{C}$, è $n_1 P_1 + \dots + n_k P_k$ con $n_i \in \mathbb{Z}$
non sing.

⇒ $\text{Div}(\mathcal{C}) = \{ f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ t.c. } f(P_i) \neq 0 \text{ per un \# finito di } i \}$
 $= \{ n_1 P_1 + \dots + n_k P_k, P_i \in \mathcal{C}, n_i \in \mathbb{Z} \}$

φ funzione razionale, $\varphi \neq 0$: $\text{div}(\varphi) = \sum_{P \in \mathcal{C}} \text{ord}_P(\varphi) \cdot P$

φ su E : $\varphi = R(\wp(z), \wp'(z))$
 $z \in E$ viene da un toro

↑ somme fin perché φ non ha un # fin di D, poli

$\text{Div}(\mathcal{C}) = \{ \sum_{P \in \mathcal{C}} m_P(P) \mid m_P \in \mathbb{Z} \}$ gruppo ab

12/11

$\deg: \text{Div}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ è un omomorfismo e $\ker(\deg) =: \text{Div}^0(\mathcal{C})$
 $\deg(\sum m_P(P)) = \sum m_P$

Caso $f \in \mathbb{C}(E)^*$ con $E: y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$: $\text{div}(f) = \sum_{P \in E} \text{ord}_P(f) \cdot (P)$

$E \cong T$ toro: $f = R(\wp(z), \wp'(z))$: $\text{div}(f) = \sum_{z \in T} \text{ord}_z(f) \cdot (z)$

ex $f(t) = \frac{(t-1)(t-2)}{t^3}$: $\text{div} f = 1 \cdot (1) + 1 \cdot (2) + 1 \cdot (\infty) - 3 \cdot (0)$

Def: un divisore D si dice principale se $\exists f \in \mathbb{C}(C)^*$ tale che $\text{div} f = D$
 $\rightarrow D \in \text{div}(K^*)$

⇒ Prop: $\text{div}(K^*) \subset \ker \deg = \text{Div}^0(\mathcal{C})$

Ora $\text{div}(K^*)$ è un gruppo ($\text{div}(f/g) = \text{div} f - \text{div} g$)

$\boxed{C = \mathbb{P}^1}$ $\text{Div}^0(\mathbb{P}^1) = \text{div}(\mathbb{C}(t)^*)$

Sia $D = \sum_{P \in \mathbb{P}^1} m_P \cdot (P) = \sum_{P \in \mathbb{C}} m_P \cdot P + m_\infty \cdot (\infty)$ t.c. $m_\infty + \sum m_P = 0$

⇒ $f(t) = \prod_{\substack{P \in \mathbb{C} \\ m_P \neq 0}} (t-P)^{m_P} \in \mathbb{C}(t)$, $\text{ord}_P(f) = m_P$, $\text{ord}_\infty(f) = -\sum m_P$

$C = E$ Sappiamo che una ~~curva~~ ^{funzione ellittica} ~~che viene~~ non può avere un solo polo di ordine 1
 $\Rightarrow P_1 \neq P_2 : (P_1) - (P_2) \in \text{Div}^0(C) = \text{div}(K^*)$

$$\Rightarrow \text{Pic}^0(C) = \frac{\text{Div}^0(C)}{\text{div}(K^*)}$$

Legami con gli ideali principali: $\mathbb{C}[t]$ PID: $\text{Pic}^0(\mathbb{P}^1) = 0$
 $\mathbb{C}[x, y]$ non PID: in generale $\text{Pic}^0(C) \neq 0$

$$\frac{\mathbb{C}[x, y]}{C} \ni I = \{f : f(z_0) = 0\}, \quad z_0 \neq 0$$

non $\mathbb{C}$ principale

$$C^* \hookrightarrow K^* \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}^0(C) \rightarrow \text{Pic}^0(C) \rightarrow 1 \text{ esatta}$$

$$\text{e } \text{Pic}(C) = \frac{\text{Div}(C)}{\text{div}(K^*)} \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{Z} \text{ e } \ker \text{deg} = \text{Pic}^0(C)$$

fissiamo $\in E$

$$\Rightarrow \text{Pic}(C) \cong \text{Pic}^0(C) \oplus \mathbb{Z}$$

Teo: $\forall D$ divisore di grado 0: $D \in \text{Div}^0(E) \Rightarrow \exists! P \in E \text{ t.c.}$
 "linearmente equiv." $\rightarrow [D] = [(P) - (\infty)]$
 in $\text{Pic}^0(C)$

Dim: $\circ P, Q, P+Q : P(z) = az^2(z-b) \xrightarrow{\text{div}} (z_1) + (z_2) + (-z_1 - z_2) = 3 \cdot 0$
 $\rightarrow (P) + (Q) + (-P-Q) = 3(\infty)$

Inoltre osserviamo: $\text{div}(z - z_0) = (P_0) + (-P_0) = 2 \cdot (\infty)$
 $\text{div}(P(z) - P^*(z_0)) = (z_0) + (-z_0) = 2 \cdot (0)$

$$\rightarrow [(-P_0) + (P_0)] = [2(\infty)] \rightarrow [(-P_0)] = [2(\infty) - (P_0)]$$

$$\text{e } [(P) + (Q)] = [-(-P-Q)] + 3 \cdot \infty = [(P+Q) + (\infty)]$$

$$\circ \left[\sum_{j=1}^k P_j \right] = [(P) + (k-1)(\infty)] , \quad P = \sum P_j \text{ (con la legge di gruppo)}$$

$$D \in \text{Div}^0(C) : \left[D = \sum_{j=1}^k P_j - \sum_{j=1}^k Q_j \right] = [(P) - (Q)]$$

$$\text{ma } [(P) - (Q)] = [(P) + (-Q) - 2(\infty)] = [(P-Q) - (\infty)]$$

UNICITA': $[D] = [(P) - (\infty)] = [(P') - (\infty)] \Rightarrow [(P) - (P')] = 0$
 an $x \ P \neq P'$

$$\rightarrow \varphi : \text{Div}^0(E) \rightarrow E \quad \varphi\left(\sum m_P (P)\right) = \sum m_P \cdot P$$

$$\text{Im } \varphi = E$$

$$\ker \varphi = \text{div}(K^*)$$

$$\Rightarrow E \cong \text{Pic}^0(E)$$

$$((P) - (\infty)) + ((Q) - (\infty)) = ((P+Q) - (\infty))$$

- UNIRAZIONALITA':

$$\mathbb{C}(x,y) = \begin{cases} = \mathbb{C}(t) & \text{razionale} \\ \subset \mathbb{C}(t) & \text{unirazionale} \end{cases}$$

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 : \text{razionale} \Leftrightarrow \exists \mathbb{C}(t), \psi(t) : \psi^2 = 4t^3 - g_2t - g_3 \text{ e } t = B(x,y)$$

$$\text{es: } x^2 + y^2 = 1 : x = \frac{2t}{1+t^2}, y = \frac{1-t^2}{1+t^2}, t = \frac{x}{1-y} : \text{razionale}$$

Teo (Lürath) Ogni curva unirazionale è razionale

- DIFFERENZIALE INVARIANTE:

dz su $\mathbb{C} \rightarrow$ sulla cubica: $\frac{dx}{y}$ non ha poli, invariante per trasl. nello spazio di gruppo

$$\begin{matrix} x = \wp(z) \\ y = \wp'(z) \end{matrix}, dx = \wp'(z) dz \rightarrow \frac{dx}{y} = dz$$

$$\int_0^{z_1} dz = z_1, \quad \int^P \frac{dx}{y} \text{ parametrizzazione della curva ellittica}$$

• Punti "reali" di una curva ellittica

01/13

$E: y^2 = f(x), f \in \mathbb{R}[x]$ allora $E(\mathbb{R}) = \{\infty\}$ (nel proiettivo indicando che i punti finiti fra le coordinate $\in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow E(\mathbb{R}) < E$, ed è INFINITO

$\rightarrow f$ ha deg ≥ 3 , in uno semi-retto $f(x) > 0$, quindi ha $\sqrt{f(x)} = y \rightarrow (x, y) \in E(\mathbb{R})$



• $E(\mathbb{R})$ ha 1 o 2 comp. connesse

• chiuso nello top indotte da $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

(Assumendo che la curva provenga da un toro): $W: T \rightarrow E, T = \mathbb{C}/\Lambda$

$\Rightarrow W^{-1}(E(\mathbb{R})) \subset T$ chiuso perché W continua

Ora i stirri chiusi del toro si sollevano a stirri chiusi di $\mathbb{R}^2$ che contengono L e questi sono della forma $U = V + \Lambda$, V ssp vett. $\mathbb{R}^2$, Λ reticolo: $\mathbb{C}$

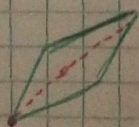
ma U deve contenere L :

• $V = 0 \rightarrow E(\mathbb{R})$ discusso an.

• $\dim V = 2$ non perché siamo $E(\mathbb{R}) = E$ ma $|E - E(\mathbb{R})| = +\infty$

• $\dim V = 1 \rightarrow V$ è una retta e $\text{rk } \Lambda = \{0, 1\}$ ma $L \subset U \rightarrow \text{rk } \Lambda = 1$

$L \xrightarrow{\pi} \Lambda$ e il $\ker \pi = L \cap V$ sottoreticolo di L di $\text{rk} = 1$



Tornando in T : V diventa un cerchio, Λ insieme finito di comp. connesse

$\Rightarrow E(\mathbb{R}) \simeq \begin{cases} \text{cerchio} \\ \text{cerchio} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{cases}$

* FUNZIONI MODULARI

- Descrivere lo spazio dei tori complessi = {spazio dei reticoli in $\mathbb{C}$ di rk = 2} / a meno di omotetia.

$$L = w_1 \mathbb{Z} + w_2 \mathbb{Z}, \quad \frac{w_1}{w_2} \in \mathcal{H} \quad (\text{scambiare } w_1, w_2)$$

ma ora $L = w_2 (T \mathbb{Z} + \mathbb{Z})$ con $T = \frac{w_1}{w_2} \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow$ Ad ogni reticolo L (a meno di omotetia) è associato $T \in \mathcal{H}$

$$\mathcal{H} \rightarrow \{\text{reticoli di } \mathbb{C}\} / \text{omotetia}$$

$$T \quad [T \mathbb{Z} + \mathbb{Z}]$$

Quando $T' \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \lambda (T \mathbb{Z} + \mathbb{Z})$?

• cioè $\begin{cases} T' = \lambda(aT+b) \\ 1 = \lambda(cT+d) \end{cases} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

$$\rightarrow T' = \frac{aT+b}{cT+d} \quad ad-bc > 0 \quad : \quad \begin{pmatrix} T' \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $\frac{\lambda T}{\lambda} = \frac{AT'+B}{CT'+D} \rightarrow T = \frac{AT'+B}{CT'+D} \quad : \quad \lambda \begin{pmatrix} T \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T' \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e anche per } \begin{pmatrix} \bar{T}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{T}' \\ 1 \end{pmatrix}$$

cioè $\gamma \in \Gamma \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) < \text{Aut}_{\text{dis}}(\mathcal{H})$

• d'altra parte: $T \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = (aT+b) \mathbb{Z} + (cT+d) \mathbb{Z} \stackrel{\text{wlog}}{=} \frac{(aT+b)}{(cT+d)} \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ wlog $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$

$\rightarrow$ vale: $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H} \simeq \{\text{reticoli di } \mathbb{C} \text{ a meno di omotetia}\}$

Ha due pt fissi! $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ fissa i. Si = i
e $STS = S$

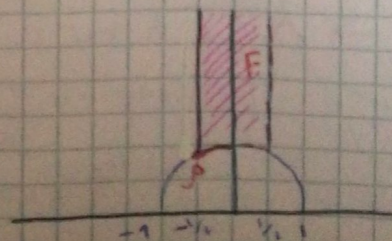
$\Rightarrow \mathcal{H} \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ non è un rivestimento $\rightarrow$ Studiamo $\Gamma \backslash \mathcal{H}$

Oss: $\mathcal{H} = SL_2(\mathbb{R}) \cdot i \rightarrow \mathcal{H} \simeq SL_2(\mathbb{R}) / \text{Stab}(i) = SO_2(\mathbb{R})$

• Cerco un dominio fondamentale

$$F = \{z \in \mathbb{C} : -1/2 \leq \text{Re}(z) \leq 1/2, |z| \geq 1\}$$

non v. i bordi a dx



$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : S^2 = -I, \Gamma' = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \Gamma / \pm I \text{ allora } ST \text{ ordine } 3 \text{ in } \Gamma'$$

Tee: $\forall z \in \mathbb{H} \exists G \ni g \text{ t.c. } gz \in F$
 $z \sim z'$ modulo l'azione di Γ' , $z, z' \in F \Rightarrow$
 $\bullet \text{Re}(z) = \pm 1/2, z' = z + 1$
 $\bullet |z| = 1 = |z'|, z' = Sz$
 $\bullet z \in \bar{F} \Rightarrow \text{Stab}_{\Gamma'}(z) = \{e\}$ oppure $z = i, \text{Stab}_G(i) = \langle S \rangle$
 oppure $z = \rho, \text{Stab}_G(\rho) = \langle ST \rangle$
 oppure $z = -\bar{\rho}, \text{Stab}_G(-\bar{\rho}) = \langle TS \rangle$

Def: $G = \langle S, T \rangle_{\Gamma'}$

Dim: $\text{Im}(gz) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2} : \text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \text{Im}\left(\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) = \frac{(ad-bc) \text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$

- $z \in \mathcal{H}$: esiste un # finito di $c, d \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } |cz+d| \leq K$
 $\rightarrow \exists \gamma \in G \text{ t.c. } \text{Im}(\gamma z) \geq \text{Im}(gz) \text{ per } g \in G \quad (\cdot)$

$\Rightarrow$ trova $m \text{ t.c. } T^m \gamma z$ ha parte reale in $[-1/2, 1/2]$

- $z_1 \in Gz$
- $\text{Re}(z_1) \in [-1/2, 1/2]$
- $|z_1| \geq 1$ infatti $\text{an.} \parallel |z_1| < 1 \rightarrow \text{Im}(S z_1) = \frac{\text{Im}(z_1^2)}{|z_1|^2} > \text{Im}(z_1)$
 $\text{Im}(\gamma z)$

- $z, gz \in \bar{F}, g \in \Gamma'$: cambiando (z, gz) con $(gz, g'(gz))$ posso supporre $\text{Im}(gz) \geq \text{Im}(z)$

$\Rightarrow |cz+d|^2 \leq 1$ poiché $-I$ agisce banalmente $\rightarrow \text{wlog } c \geq 0$

Ma ora $\text{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow c < 2 \rightarrow c \in \{0, 1\}$

- $c = 0 \rightarrow \text{wlog } d = 1 = a \rightarrow g$ traslazione: $g = T^k$

$\rightarrow \text{Re}(z), \text{Re}(gz) = \text{Re}(z) + b \in [-1/2, 1/2] \quad b > 1$: sono $-1/2$ e $1/2$

- $c = 1$: $|z+d|^2 = (\text{Re}(z)^2 + d)^2 + |\text{Im}(z)|^2 \leq 1, |\text{Im}(z)|^2 \geq \frac{3}{4}$

$\rightarrow |(\text{Re}(z) + d)| \leq 1/2, |\text{Re}(z)| \leq 1/2 \rightarrow d = \pm 1, 0$

- $d = 0$: $g = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $|z| \leq 1, z \in F \rightarrow |z| = 1$: $gz = a - 1/z$ $\begin{matrix} \swarrow a=0 \\ \searrow a>1 \rightarrow \text{esce} \\ \rightarrow \text{arco di cerchio} \end{matrix}$

- $d = \pm 1$: $\text{Re}(z) = \pm 1/2 \Rightarrow \text{Im}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $gz = z, g \in \Gamma', z \in \bar{F}$ allora sono in uno dei casi sopra:

Neumannamente $|z| = 1$ e:

- $z = i$
- $z = \rho, \bar{\rho}$

$$+b = cz^2 + dz \rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

$$z = \frac{(d-a)}{2c} \pm \sqrt{\frac{(d-a)^2 + 4bc}{2c}} = \frac{(d-a)}{2c} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2 - 4}{2c}}$$

$\bullet |a+d| \leq 1 \quad (c \in \mathcal{H})$

$\bullet \left| \frac{a-1}{c} \right| \leq 1$

$$\Gamma = SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma' = \Gamma / \pm I$$

01/15

Finiamo la classificazione di $\text{stab}(z)$ se $z \in \bar{F}$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : gz = z : az + b = z(cz + d) \rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Chiaramente $c \neq 0$ (se no $z \in \mathbb{Q} \cap F = \emptyset$), wlog $c > 0$ ($\Gamma' = \Gamma / \pm I$)

$\bar{F} = \{z \mid \text{Re } z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \text{Im } z > 0, \|z\| > 1\}$ quindi se

$$cz^2 + (d-a)z - b = 0 \text{ anche per } \bar{z} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z + \bar{z}}{2} \right| = \left| \frac{(d-a)}{2c} \right| = \left| \frac{a-d}{2c} \right| \leq \frac{1}{2} \quad |a-d| \leq c \\ \left| \frac{z - \bar{z}}{2i} \right| = \left| \frac{-b}{c} \right| \geq 1 \rightarrow b \leq -c \end{array} \right.$$

$$\text{L'eq ha } \Delta = (d-a)^2 + 4bc$$

$$= (a+d)^2 + 4(bc - ad) = (a+d)^2 - 4$$

Sicuramente due a due $\Delta < 0 \rightarrow |a+d| < 2$

① $a+d=0$: $|a-d| = 2|a| \leq c \rightarrow (1 = ad - bc) = \underbrace{-a^2}_{<0} - \underbrace{bc}_{<0} : -bc = 1 + a^2$
quindi $1 + a^2 \geq c^2 \geq 4a^2$ quindi $a=0$ e $c=1$

$$\rightarrow g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S \text{ e l'unico pt fisso di } S \text{ è } z=i$$

② $a+d = \pm 1 = \varepsilon$: $-d = a - \varepsilon : |a-d| = |2a - \varepsilon| \leq c \rightarrow 1 = ad - bc$ e ancora
 $-bc = 1 - ad = 1 + a^2 - a\varepsilon$ quindi $-4b = 4 + 4a(a - \varepsilon)$

$$\text{cioè } \left. \begin{array}{l} 3 + (2a - \varepsilon)^2 = -4bc \geq 4c^2 \\ 3 + c^2 \geq 4c^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} c^2 \leq 3 \\ \rightarrow \boxed{c=1} \end{array} \quad \begin{array}{l} = 4 + (2a - 2\varepsilon)^2 = \\ = 4 + (2a - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 = \\ = 3 + (2a - \varepsilon)^2 \end{array}$$

$$|2a - \varepsilon| = 1 \text{ cioè } 2a - \varepsilon = \eta \rightarrow a = \frac{\eta + \varepsilon}{2}, d = \frac{\varepsilon - \eta}{2} \quad \begin{array}{l} \varepsilon = \pm 1 \\ \eta = \pm 1 \end{array}$$

$\rightarrow 4$ poss: $ST, (ST)^2, TS, (TS)^2$

Cor: $G = \Gamma$ cioè Γ generato da S, T e anche Γ' (come grp)

Dim: $z_0 \in F^\circ, x \in \Gamma : xz_0$: pu teo $\exists g \in G$ t.c. $gxz_0 \in F$
e pu a pt z , tale $gx = \text{id} \rightarrow gx \in G \rightarrow x \in G$

$$\Rightarrow \Gamma = \langle S, T \mid S^2 = I, (ST)^3 = I \rangle$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} < \Gamma \text{ di indice 12 (e di } \Gamma' \text{ di indice 6)}$$

$$\{g : g \equiv I(2)\} \text{ ed è } \Gamma_2 < \Gamma(2)$$

Def: $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfo n. di debolmente modulare di peso $2k$

$$\forall g \in \Gamma: g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: f(gz) = (cz+d)^{2k} f(z)$$

Oss: deb. modulare di peso 0 $\Rightarrow$ invariante per Γ

$$\text{Quando } d(gz) = d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} dz = \frac{dz}{(cz+d)^2}$$

$$\underline{k=1}: f(gz) = (cz+d)^2 f(z): f(gz) d(gz) = f(z) dz$$

cioè la forma differenziale è invariante

k generico: "forme diff di peso k " $f(z) (dz)^k = f(z) (dz)^k$

Poiché $\Gamma = \langle S, T \rangle$ dire $f(gz) = (cz+d)^{2k} f(z) \quad \forall g \in \Gamma$ equivale a dire:

$$\begin{cases} f(Tz) = f(z) \\ f(Sz) = z^{2k} f(z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(z+1) = f(z) \\ f(-1/z) = z^{2k} f(z) \end{cases}$$

Oss: $f\left(\frac{gz}{g(z)}\right) = (cz+d)^{\text{disp}} f(z)$ è soddisfatta solo per $f=0$
infatti: $g = -I: f(-z) = (-1)^{\text{disp}} f(z) = f(z) \rightarrow$ assurdo? perché

$\rightarrow$ copri

L

• Esiste $\tilde{f}: D^* \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfo t.c. $f(z) = \tilde{f}(q)$ $q = e^{2\pi i z}: \mathbb{C}/\mathbb{Z} \xrightarrow{q} D^*$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \\ q \downarrow & & \uparrow \tilde{f} \\ D^* & & \end{array} \quad \begin{array}{l} f \text{ periodica al qnt } \frac{1}{2} \text{ perché} \\ f(nz) = f(z) \text{ (fissata dalle trasl.)} \end{array}$$

$\rightarrow$ se $\tilde{f}$ si estende a f meromorfa in D : allora f meromorfa a $+\infty$
 $\rightarrow$ si dice MODULARE

* FUNZIONI MODULARI

Def: Una funzione modulare di peso $2k$ è

$$f \text{ debolmente modulare: } f = \tilde{f}(q) \text{ t.c. } \tilde{f}: D^* \rightarrow \mathbb{C} \text{ di peso } 2k$$

si estende a $\tilde{f}$ meromorfa in D

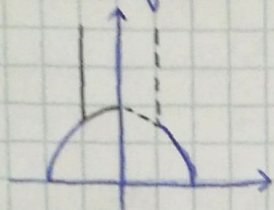
Se f si estende in modo olomorfo a $+\infty$: f forma modulare

Oss: funzioni modulari di peso diverso sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$

$$\{f_i\} \text{ peso } k_i: \sum a_i f_i(x) = 0 \quad \forall x \rightarrow g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}: 0 = \sum a_i f_i(gz) = \sum a_i (cz+d)^{2k_i} f_i(z)$$

- Dominio fondamentale per l'azione di $SL_2(\mathbb{Z})$ su H

01/20



$$Tz = z+1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Sz = -\frac{1}{z} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Funzioni modulari

- debolmente modulari: f meromorfa in H tale che

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{2k} f(z) \quad \text{"di peso } 2k"$$

idmo che $f(Tz) = f(z) \rightarrow f$ periodica

$$\Rightarrow f(z) = \tilde{f}(q) \quad q = e^{2\pi i z} \text{ con } \tilde{f} \text{ meromorfa su } D^*$$

- Se $\tilde{f}$ "si estende" meromorficamente a in $D \rightarrow f$ si dice funzione modulare

- f forma modulare se è modulare ovunque.
cuspidale a 0 a $+\infty$

$k=0$: f invariante per l'azione di g

$k=1$: $f(z) dz$ invariante per l'azione di g

$\rightarrow$ in generale ~~basato~~ rappresentano le k -forme diff su $\mathbb{H}$

• $q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{-24}$ ← discriminante an.
a $f_2(z)$ per $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$

↑
inoltre per verificare che f modulare, basta verificare che

• Forme modulari sono un'algebra su $\mathbb{C}$: f_1 peso $2k_1$, f_2 peso $2k_2$: $f_1 + f_2$ peso $2(k_1+k_2)$

$$\begin{cases} f(z+1) = f(z) \\ f(-\frac{1}{z}) = z^{2k} f(z) \end{cases}$$

$\rightarrow$ trovare una f invariante: f_1, f_2 di peso $2k \rightarrow \frac{f_1}{f_2} \in \Gamma\text{-inv.}$

Serie di Eisenstein

- $L = m_1 \mathbb{Z} + m_2 \mathbb{Z}$: $G_k(L) = \sum_{\lambda \in L} \frac{1}{\lambda^{2k}}$

- $L = z\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$: $G_k(z) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$

Prop: $k > 1$: $G_k(z)$ modulare di peso $2k$, $G_k(\infty) = 2\zeta(2k) \neq 0$

Dim: • $\text{Im } z_0 > 0$ e $|\text{Re } z_0| < k$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{Re}(s) > 1$$

$$\Rightarrow \text{Im } z_0 + n \geq c \cdot \max(|\text{Im } h|, |n|) \text{ su } \text{Int}(z_0)$$

$\rightarrow$ serie ben def.

$$G_k(z+1) = G_k(z)$$

$$G_k(Sz) = z^{2k} \sum_{m,n} \frac{1}{(mz+n)^{2k}} = z^{2k} G_k(z)$$

• termine a termine, limite per $z \rightarrow +\infty$ (conta solo $m \neq 0$)

$g_2 = 60 G_2, g_3 = 140 G_3 : \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \rightarrow \Delta(z)$ funzione modulare di peso 12

• $\Delta(z) \neq 0$ se $z \in \mathcal{H}$ (disc di $4x^3 - g_2 x - g_3$ non ha radici multiple)

• $\Delta(\infty) = 0$ $g_2(\infty) = \frac{4\pi^2}{3}, g_3(\infty) = \frac{8\pi^6}{27}$

$\rightarrow \Delta(z)$ forma modulare cuspidale

• $j(z) = \frac{1728 g_2^3}{\Delta} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ Teo z e immag. quadratico in $\mathbb{Q}$, allora $j(z)$ algebrico

f modulare di peso 0

$\alpha L \subset L \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ quindi α imm quadr

Se j fosse trascendente e venisse da una curva con endomorfismi $\rightarrow$ la curva generica avrebbe endomorfismi

In questo caso il grado di $j(z)$ in $\mathbb{Q}$ è uguale a # di classi di ideali nell'anello associato

Teo: f funzione modulare di peso $2k$ non nulla, allora:

$$v_\infty(f) + \sum_{p \in \mathcal{H}} \frac{v_p(f)}{e_p} = \frac{k}{6}$$

dove $v_p(f) = \text{ord}_p(f)$ come funzione meromorfa

(Δ in fondo è def come $\text{ord}_\infty(\tilde{f})$)

↑ e inoltre $e_p = \# \text{Stab}_{\Gamma_1}(p) \leftarrow p \in F \rightarrow e_p = 1 \text{ se } p \neq i, 3, \infty$
 $e_i = 2$
 $e_3 = 3$

per $k=0$ è la solita formula che dice che una f meromorfa ha tanti zeri quanti poli

- Calcoliamo gli zeri di una 1-forma diff: $\varphi \in \mathbb{Q}[z], \varphi dz : z \in X$

$\int(z_0) = 0$ allora $dz = \psi d\zeta \Rightarrow \varphi dz = \underbrace{\varphi \psi}_{\text{qualcosa di tipo ordine in } z_0} d\zeta$

- Per esempio su $y^2 = f(x)$, $\deg f = 3$ e connesso dx

Sia $z_0 = (x_0, y_0)$: - se $y_0 \neq 0$: $\int(x, y) = x - x_0, d\zeta = dx \Rightarrow dx = d\zeta$ mult = 0

- se $y_0 = 0$: $\int(x, y) = y : d\zeta = dy = \frac{f'(x)}{2y} dx$

$\rightarrow \text{mult}(x_0, y_0) = \text{Indice} = dx = \frac{2y}{f'(x)} d\zeta$

- $\mathbb{P}^1$: dz : sia $z_0 \in \mathbb{P}^1, z_0 \neq \infty \rightarrow z - z_0$ parametro locale
 $d(z - z_0) = dz \rightarrow$ non ha zeri

$z_0 = \infty \rightarrow \zeta = \left(\frac{1}{z}\right) \rightarrow d\zeta = -\frac{1}{z^2} dz \rightarrow dz = -z^2 d\zeta = \frac{d\zeta}{-\zeta^2}$ polo doppio a $+\infty$

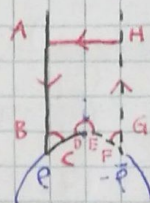
$\rightarrow \text{ord}_p(dz) = 0 \quad \forall p \neq +\infty, \text{ord}_\infty(dz) = +2$ a ∞

Teo f funzione modulare di peso $2k$, allora:

01/22

$$v_{\infty}(f) + \sum_{p \in \mathbb{Z}^+} \frac{v_p(f)}{e_p} = \frac{k}{6}$$

Dim: $\int_{\mathbb{C}} \frac{df}{f} = 2\pi i \sum_{p \in \mathbb{C}} v_p(f)$



Ora: $\rightarrow \int_A^B \frac{df}{f} + \int_G^H \frac{df}{f} = 0$ (f periodica di periodo 1)

$\rightarrow \int_H^A \frac{df}{f} = \int_{\text{cerchio}} \frac{d\tilde{f}}{\tilde{f}} = -2\pi i v_{\infty}(f)$
 $f(z) = \tilde{f}(q)$

$\rightarrow \int_B^C \frac{df}{f}$: se $f(z) = (z-p)^m g(z)$ con g regolare in p
 $\Rightarrow \frac{df}{f} = m \frac{dz}{z-p} + \frac{dg}{g}$ quindi

$v_p(f) \int_B^C \frac{dz}{z-p} + \int_B^C \frac{dg}{g}$
 $\parallel$
 $\int \frac{r e^{i\theta} d\theta}{r e^{i\theta}}$
 $\downarrow$
 $- \frac{2\pi i}{6}$
 $\downarrow r \rightarrow 0$ ($\frac{dg}{g}$ esplosivo in p e $BC \rightarrow 0$)

e analog. $\int_F^G \frac{df}{f} \rightarrow -v_p(f) \frac{2\pi i}{6}$

Ma $f(-\frac{1}{z}) = z^{2k} f(z) \rightarrow v_{-p}(f) = v_p(f)$

$\rightarrow \int_E^F \frac{df}{f}$: la sostituzione $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ manda EF in DC
e $\frac{df}{f}(st) = \frac{2k dz}{z} + \frac{df}{f}$

$\rightarrow \int_E^F \frac{df}{f} + \int_C^D \frac{df}{f} = \int_D^C \frac{df}{f} + \int_D^C \frac{2k}{z} dz + \int_C^D \frac{df}{f} \rightarrow 2k \frac{2\pi i}{6}$

$\rightarrow \int_D^E \frac{df}{f}$

Def: $M_k = \mathbb{C}$ sp. rett. delle forme modulari di peso $2k$

Oss: prese m f. linearmente indep. in M_k trova

g = comb. lineare delle f che si annulla in $m-1$ pt. $\neq \infty, i$

$\Rightarrow \frac{k}{6} = v_{\infty}(f) + \sum_{p \in \mathbb{Z}^+} \frac{v_p(f)}{e_p} \geq m-1 \rightarrow m \leq \frac{k}{6} + 1$

$\rightarrow M_k$ finito
sp. rett.

- $M_k = 0 \forall k < 0$ perché per def non hanno poli

- $M_0 = \mathbb{C}$: $1 \in M_0$: se avessi f non cost in $M_0 \rightarrow f(x) = k \rightarrow f - k \cdot 1$ ha uno zero, on.

- $M_1 = 0$ (non posso scrivere $\frac{1}{6}$ come $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + c$)

- M_2 : $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \rightarrow f$ deve avere un unico 0 a p di peso 1
 $G_2 \in M_2$: $f \in M_1, x \neq p$: $f - \frac{f(x)}{G_2(x)} G_2 = 0 \rightarrow f = \langle G_2 \rangle$
 $\rightarrow M_2 = \mathbb{C} \cdot G_2$

- M_3 : $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow f$ deve avere un unico 0 di ordine 1 in i

$\rightarrow M_3 = \mathbb{C} \cdot G_3$

- $M_4 = \mathbb{C} \cdot G_4 \Rightarrow G_2^2$ forma modulare di peso 8, allora $G_2^2 = k \cdot G_4$
 - $M_5 = \mathbb{C} \cdot G_5 \rightarrow G_5 = k \cdot G_2 \cdot G_3$

- $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \in M_6$, non si annulla mai su $\mathcal{H} \rightarrow v_{\infty}(\Delta) = 1$

Per $k \geq 6$: $M_k = \mathbb{C} \cdot G_k + M_k^0$ e una forma cuspidale $\rightarrow$

$\uparrow$
quelle che si annullano a $+\infty$

$f \in M_k^0$: $\frac{f}{\Delta} \in M_{k-6}$

$\Rightarrow \dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{6} \rfloor & k \equiv 1 (6) \\ \lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1 & k \not\equiv 1 (6) \end{cases}$ $\uparrow$ f non ha poli in $\mathcal{H}$

, inoltre $\sum M_k = \mathbb{C}[G_2, G_3]$

dove M_k = poly omogenei pesati in G_2, G_3

Inoltre G_2^3, G_3^2 lin indep su $\mathbb{C}$ (- hanno zeri in pt di stinti
 - $j = 1728 \frac{G_2^3}{\Delta}$ sarebbe costante)

$j(z)$: funzione modulare di peso 0, vediamo che ha solo un polo semplice a ∞

se $j(z_1) = j(z_2) \rightarrow$ i reticoli $z_1\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, $z_2\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ devono essere omotetici

$\Leftrightarrow z_2 = g z_1$ per qualche $g \in \Gamma$

$\uparrow$
Infatti: TEO $\Rightarrow v_{\infty}(j) = -1 \rightarrow \sum_{p \in \mathcal{H}} \frac{v_p(j)}{e_p} = 1$

Ma j ha uno zero di ordine 3 in p , $\rightarrow \sum \frac{v_p(j) - e_p}{e_p} = 1$
 ha uno zero di ordine 2 in i $\forall c$

$\rightarrow j$ è BIGETTIVA

Quindi ogni curva proviene da un toro

es: f modulare di peso 0 $\Leftrightarrow$ qnt di due modulari dello stesso peso
 $\Leftrightarrow f \in \mathbb{C}(j)$

$\Gamma(2) = \{g \in \Gamma : g \equiv I \pmod{2}\} : [\Gamma : \Gamma(2)] = 6 \rightarrow$ si possono definire
oss: $\Gamma(2) \backslash \mathbb{H}$ è un rivestimento.

Così $\Gamma(2) \backslash \mathbb{H}$: sup iperbolica, biomorfa a $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$
 tramite λ f modulare. $j = \frac{c(\lambda^2 + \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$

Tro (Ricord): f intera (cio in $\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow$ f assume tutti i valori di $\mathbb{C}$
 tranne al più 1

Dim: $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} - \{0, 1\}$ (a meno di tres f. biomorfe)
 $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$

Abbiamo: $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ $\xrightarrow{\lambda} \mathbb{H}$ $\rightarrow$ due estremi costanti
 (tracce $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ oморfe $\rightarrow$ due estremi costanti)

• Formula per la cotangente

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) \quad \text{converge in } \mathbb{D}$$

Dr: disco di raggio $r \rightarrow f(z) = \underbrace{f_r(z)}_{\text{termina con } n \leq 2r} + \underbrace{g_r(z)}_{\text{domorfe in } \mathbb{D}_r}$

termina con $n \leq 2r$
 $\rightarrow$ RAZIONALE

$$\sum_{n>2r} \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} = \sum_{n>2r} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \sum_{n>2r} 2 \frac{-z}{n^2(1 - z^2/n^2)}$$

$\Rightarrow$ f meromorfa, con poli su $\mathbb{Z}$ di molteplicità 1, Res 1

Inoltre f è periodica (la derivata lo è, quindi è periodica a meno di una cost. ma portando al limite per $z \rightarrow \infty \rightarrow \text{cost} = 0$)

- $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ e per $z \rightarrow 0$ il residuo è 1, poli semplici su $\mathbb{Z}$ periodo 1

$\rightarrow \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = f(z) + g(z)$ con g periodica di periodo 1 e domorfa

Quindi per $z \rightarrow \pm \infty$ (parte imm.) $f(z) \rightarrow 0$ $\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ limitata $\rightarrow g$ limitata $\rightarrow g$ cost

$\Rightarrow$ Basta vedere l'uguaglianza in un pt, o sviluppi in $z=0$

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ e anche } \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \cdot \pi = \frac{1}{z} \rightarrow \pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}$$

$$\pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} = \pi i \frac{2 + (e^{2\pi i z} - 1)}{1 - e^{2\pi i z}} = \frac{-2\pi i}{1 - e^{2\pi i z}} + i\pi$$

Ma ora $\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i z}} = \frac{2\pi i}{2\pi i z(1 + \dots)} = \sum \underbrace{a_n}_{Q \cdot \pi^n} z^n$

d'altra parte $f(z) = \frac{1}{z} + \sum \frac{1}{n(1+z/n)} - \frac{1}{n(1-z/n)}$ ed espando
in serie
geometrico

$\rightarrow \sum \frac{1}{n^k}$ trova i valori